

Представления и их характеры

- A6.1.** а) Найдите два одномерных представления группы \mathfrak{S}_n и докажите, что других одномерных представлений у \mathfrak{S}_n нет.
- б) Рассмотрим перестановочное представление \mathfrak{S}_n в n -мерном пространстве, связанное с действием \mathfrak{S}_n на множестве $\{1, \dots, n\}$. Укажите в нём тривиальное одномерное подпредставление. Найдите дополнительное к нему представление и докажите, что оно неприводимо. Это представление называется *стандартным*, или *тавтологическим*.
- A6.2.** Несложно проверить, что группа \mathfrak{S}_4 разбивается на пять классов сопряжённости. Значит, у неё имеется пять неприводимых представлений. Три из них описаны в предыдущей задаче.
- а) Вычислите характеры этих представлений.
- б) (**Kleinsche Vierergruppe**) Найдите в \mathfrak{S}_4 нормальную подгруппу из 4 элементов (она называется *четверной группой Клейна* и обозначается через V_4). Докажите, что $\mathfrak{S}_4/V_4 \cong \mathfrak{S}_3$. Найдите неприводимое двумерное представление группы \mathfrak{S}_4 , ядром неэффективности которого является V_4 , и вычислите его характер.
- в) Используя соотношения ортогональности, вычислите характер оставшегося неприводимого представления группы \mathfrak{S}_4 .
- A6.3.** Составьте «таблицу умножения» для представлений группы \mathfrak{S}_4 : для любых двух неприводимых представлений V и W разложите их тензорное произведение $V \otimes W$ в сумму неприводимых представлений.
- A6.4.** Докажите, что группа вращений куба изоморфна \mathfrak{S}_4 , и разложите на неприводимые перестановочные представления группы \mathfrak{S}_4 , соответствующие действию группы на а) вершинах; б) рёбрах; в) гранях куба.
- A6.5.** а) Опишите все неприводимые представления группы \mathfrak{A}_4 и вычислите их характеры; б) Составьте «таблицу умножения» для представлений группы \mathfrak{A}_4 .
- A6.6.** Всякое неприводимое представление группы \mathfrak{S}_4 является также представлением \mathfrak{A}_4 .
- а) Какие из представлений \mathfrak{S}_4 остаются неприводимыми при ограничении на \mathfrak{A}_4 , а какие раскладываются в прямую сумму неприводимых?
- б) Какие пары неизоморфных представлений \mathfrak{S}_4 изоморфны как представления \mathfrak{A}_4 ?
- в) Какие неприводимые представления группы \mathfrak{A}_4 возникают при ограничении с представлений \mathfrak{S}_4 ?