НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Повторный экзамен. 5.10.2012.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо _не позднее_*, чем 19 октября, отдать мне или положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) или оставить на вахте внизу в конверте с моим именем.*

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее трёх задач.

Задача 1. Рассмотрим кривую, у которой кривизна не обращается в ноль. Пусть $\mathbf{w}$ некоторый постоянный вектор. Доказать, что если в каждой точке кривой соответствующая нормальная плоскость (то есть плоскость, порождённая векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ из репера Френе) содержит вектор $\mathbf{w}$, то кривая плоская *(5 баллов).*

Задача 2. Пусть $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e_2}$ образуют ортонормальный базис в касательном пространстве в точке p двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$. Докажите, что

$$H = \mathbf{II}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \mathbf{II}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2).$$

(5 баллов).

Задача 3. Пусть M_1 и M_2 римановы многообразия. На прямом произведении $M = M_1 \times M_2$ естественным образом вводится структура риманова многообразия, так как на касательном расслоении $TM = TM_1 \oplus TM_2$ естественно вводится евклидова метрика.

Пусть $p_i : M = M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$, $i = 1, 2$, естественные проекции. Чтобы упростить дальнейшие формулы, введём обозначение $X_i = dp_i(X) \in \Gamma(TM_i)$, где $X \in \Gamma(TM)$ векторное поле на M. Пусть R тензор Римана риманова многообразия M, а R^i тензор Римана римановых многообразий M_i, $i = 1, 2$.

Доказать, что $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R^1(X_1,Y_1)Z_1, W_1\rangle + \langle R^2(X_2,Y_2)Z_2, W_2\rangle$. *(5 баллов).*

Задача 4. Пусть в условиях предыдущей задачи $\sigma \subset T_pM$, $p \in M$, такая 2-плоскость, что $\dim dp_i(\sigma) = 1$, $i = 1, 2$, то есть плоскость σ «натянута на вектор, касательный к M_1, и на вектор, касательный к M_2». Доказать, что тогда секционная кривизна в точке p в направлении σ равна нулю, $K_\sigma = 0$. *(5 баллов).*

Задача 5. Доказать, что в любой точке p группы Ли G с биинвариантной метрикой секционная кривизна в направлении любой 2-плоскости в T_pG неотрицательна *(10 баллов).*

Задача 6. Доказать, что $\mathrm{SO}(3)$ с метрикой, соответствующей скалярному произведению $\langle \xi, \eta\rangle_e = \operatorname{tr} \xi\eta^T$, является пространством постоянной кривизны, то есть доказать, что секционная кривизна группы $\mathrm{SO}(3)$ является константой, то есть не зависит ни от точки, ни от выбранной двумерной плоскости в касательном пространстве. Найти эту константу *(10 баллов).*

Задача 7. Докажите, что для многообразия положительной секционной кривизны $K \geqslant \mathrm{const} > 0$ существует такая постоянная T, что любая геодезическая, длина которой не меньше чем T, содержит пару точек, сопряжённых вдоль этой геодезической. *(10 баллов).*

Задача 8. Пусть ξ комплексное расслоение, $\operatorname{rk} \xi = k$, а $S^2\xi \subset \xi \otimes \xi$ его симметрический квадрат. Найдите $c_1(S^2\xi)$ *(10 баллов).*

Задача 9*. С помощью характеристических классов докажите, что $\mathbb{CP}^2$ не может быть краем какого-либо многообразия *(20 баллов).*