# Производящие функции

*Е.О. Черноусова (Ежова)*

Производящие (характеристические) функции в теории вероятностей и (асимптотической) комбинаторике (пропаганда идеи: часто для нахождения чисел, имеющих комбинаторную или вероятностную природу, выгодно изучить некоторое функциональное уравнение относительно неизвестной функции, которая содержит в себе всю информацию об этих числах): формальные грамматики (теорема Лагранжа), перечислительная комбинаторика (теория Д. Пойа), метод включения и исключения и его обобщения (подход Дж.-К. Рота), метод отыскания значений (и их асимптотик) различных комбинаторных сумм (подход Г.П. Егорычева), сведение вычисления (асимптотики) чисел, имеющих вероятностную природу, к вычислению вычетов (к исследованию асимптотического поведения интегралов в комплексной плоскости, зависящих от параметра, с помощью метода перевала или стационарной фазы), предельные теоремы и законы больших чисел.

В начале, не вдаваясь в тонкости теории, покажем, как работает метод производящих функций в трех классических задачах.

**1)** ***Задача о взвешивании.*** В начале XVIII века Л.Эйлер решал задачу: *Какие грузы можно взвесить гирями в* $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^m,\ \ldots$ *грамм, и сколькими способами?*
Эйлер рассматривает бесконечное произведение двучленов:

$$\alpha(x)=(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\cdots\left(1+x^{2^m}\right)\cdots$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, получается «бесконечный» многочлен:

$$\alpha(x)=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

Замети, что коэффициенты $A_k$ равны числу различных представлений числа $k$ в виде суммы некоторых из чисел: $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^m,\ \ldots$, другими словами это число способов взвесить груз в $k$ грамм указанными гирями.
Для нахождения коэффициентов $A_k$ домножим правую и левую часть последнего равенства на $(1-x)$ и воспользуемся тождествами:

$$\begin{aligned}&(1-x)(1+x)=\left(1-x^2\right)\\&\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)=\left(1-x^4\right)\\&\left(1-x^4\right)\left(1+x^4\right)=\left(1-x^8\right)\\&\ldots\end{aligned}$$

Получим:

$$(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\cdots\left(1+x^{2^m}\right)\cdots=1$$

Т.е.

$$(1-x)\alpha(x)=1$$

$$\alpha(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$

Таким образом, $A_k=1$ для всех $k$, т.е. всякий груз в целое число грамм можно взвесить гирями в $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^m,\ \ldots$, притом единственным способом.

***Упражнение.*** Доказать, что любое целое положительное число можно единственным образом в двоичной системе исчисления. (Указание: сравнить с задачей о взвешивании)

**2)** ***Задача о разбиении числа.*** Так Л.Эйлер назвал следующую задачу: *Найти число положительных целых решений уравнения:*

$$y_1 + y_2 + \cdots y_m = k,$$

*где* $m$ *и* $k$ *- фиксированные натуральные числа.*
Здесь к цели приводит выражение:

$$\beta(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 \dots\right)^m$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, получим:

$$\beta(x) = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 \dots$$

Теперь коэффициент $B_k$ дает ответ к поставленной задаче.

Можно переписать выражение в виде:

$$\beta(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 \dots\right)^m = \left(\frac{1}{1-x}\right)^m = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 \dots$$

Воспользовавшись дифференцированием последнего соотношения и подставляя $x = 0$, получим формулу для коэффициентов:

$$B_k = \frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)}{k!}.$$

***3) Задача о размене.*** *Сколькими способами можно разменять доллар монетами в* $1, \;\; 5, \;\; 10, \;\; 25, \;\; 50$ *центов? Или сколько неотрицательных целых решений имеет уравнение*

$$y_1 + 5y_2 + 10y_3 + 25y_4 + 50y_5 = 100?$$

В более общем виде «задачу о размене» ставят так: *Сколько неотрицательных целых решений имеет уравнение*

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \cdots + a_m y_m = k,$$

*где* $a_1, \dots, a_m, n$ *- фиксированные натуральные числа?*

Для решения этой задачи воспользуемся выражением:

$$\gamma(x) = \left(1 + x^{a_1} + x^{2a_1} + x^{3a_1} + \dots\right)\left(1 + x^{a_2} + x^{2a_2} + x^{3a_2} + \dots\right) \times \dots \times \left(1 + x^{a_m} + x^{2a_m} + x^{3a_m} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(1 - x^{a_1}\right)\left(1 - x^{a_2}\right)\cdots\left(1 - x^{a_m}\right)} = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$$

Теперь коэффициент $C_k$ дает ответ на поставленный вопрос.

## *Теперь немного теории.*

*Производящей функцией* для последовательности $a_0, \; a_1, \; \dots \; a_n, \; \dots$ называется формальный степенной ряд

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Термин «формальный» означает, что мы не находим область сходимости ряда $A(x)$, нигде не будем вычислять значений $A(x)$ для конкретных значений переменной $x$, будем лишь выполнять некоторые операции над такими рядами и определять коэффициенты при степенях $x$; таким образом, $A(x)$ интересует нас не как числовая функция от переменной $x$, а как «носитель» последовательности $(a_k)$.

Суммой произвольных рядов

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k,\quad B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$$

называется ряд

$$A(x)+B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k.$$

Произведением ряда $A(x)$ на число $\lambda$ называется ряд

$$\lambda A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda a_k x^k.$$

Произведением рядов $A(x)$ и $B(x)$ называется ряд

$$A(x)B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k,$$

где $c_k=\sum_{i=0}^{k}a_i b_{k-i}$.

Из курса математического анализа известно, что если степенной ряд сходится в некоторой окрестности нуля, то в этой окрестности его сумма является аналитической функцией, по отношению к которой сам ряд является рядом Маклорена:

$$a_k=\frac{A^{(k)}(0)}{k!},\quad k=0,1,2,\dots.$$

Ниже приведены производящие функции для некоторых простых последовательностей:

| Последовательность $(a_k)$ | Производящая функция $A(x)$ |
|---|---|
| $1,1,\dots,1,\dots$ | $\frac{1}{1-x}$ |
| $1,\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\dots,\frac{1}{k!},\dots$ | $e^x$ |
| $1,2,2^2,\dots,2^k,\dots$ | $\frac{1}{1-2x}$ |
| $0,1,2,\dots,k,\dots$ | $\frac{x}{(1-x)^2}$ |
| $C_n^0,C_n^1,\dots,C_n^k,\dots,C_n^n,0,\dots$ | $(1+x)^n$ |
| $1,\alpha,\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!},\dots,\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},\dots$ | $(1+x)^\alpha$ |

Покажем, как может быть получена производящая функция для последовательности неотрицательных целых чисел:

$$\sum_{k=0}^{\infty}kx^k=x\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-1}=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(x^k\right)=x\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)=x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Применим аппарат производящих функций к решению следующей весьма общей по постановке задачи.

*Найти $a_k$ - число всех неупорядоченных k-элементных выборок с повторениями, удовлетворяющих заданными ограничениями на число вхождений в них каждого элемента генеральной совокупности $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$: элемент $x_i$ может* *присутствовать в выборке* $y_i$ *раз, где* $y_i$ *- элемент некоторого числового множества* $Y_i \subset \mathrm{N}_0$ *(*$i=1,\ldots,n$*).*

Проиллюстрируем постановку задачи на примере:

*Сколько разных наборов из* $k$ *шаров можно получить, имея 1 синий шар, 2 одинаковых белых и 4 одинаковых красных.*

Здесь генеральная совокупность состоит из синего, белого и красного шара. Возможное число вхождений каждого шара в набор определяется множествами $Y_1=\{0,1\}$, $Y_2=\{0,1,2\}$, $Y_3=\{0,1,2,3,4\}$.

Пусть $A(x)$ производящая функция для последовательности $(a_k)$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$A(x)=\prod_{i=1}^{n}\sum_{y_i\in Y_i}x^{y_i}.$$

Действительно,

$$A(x)=\prod_{i=1}^{n}\sum_{y_i\in Y_i}x^{y_i} = \sum_{y_1,\ldots,y_n}x^{y_1}\ldots x^{y_n} = \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k,$$

где $a_k = \sum\limits_{y_1+\ldots+y_n=k} 1$. В выражении для $a_k$ суммирование производится по всем наборам $(y_1,\ldots,y_n)$ таким, что $\forall i \;\; y_i\in Y_i$ и $y_1+\ldots+y_n=k$, в результате чего получится искомое число k-выборок.

Для примера с шарами производящая функция имеет вид:

$$A(x)=(1+x)\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)=1+3x+5x^2+6x^3+6x^4+5x^5+3x^6+x^7.$$

Теперь рассмотрим применение аппарата производящих функций к выводу формул для числа сочетаний (без повторений и с повторениями). В обоих случаях будем считать, что генеральная совокупность состоит из $n$ элементов.

***Сочетания без повторений из n по k.*** Каждый элемент в выборке встречается не более одного раза, т.е. $\forall i \;\; Y_i=\{0,1\}$; k-выборка при этом является сочетанием (без повторения) из n по k. Производящая функция имеет вид:

$$A(x)=(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k.$$

***Сочетания с повторениями из n по k.*** Каждый элемент в выборке может появиться любое число раз: $\forall i \;\; Y_i=\mathrm{N}_0$; k-выборка при этом суть сочетание с повторениями из n по k. Производящая функция имеет вид:

$$A(x)=\left(1+x+x^2+\ldots\right)^n=\left(\frac{1}{1-x}\right)^n=(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(-x)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}(-x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^k x^k.$$

## *Число счастливых билетов*

Трамвайные билеты имеют шестизначные номера. Билет называют счастливым, если сумма его первых трех цифр равна сумме трех последних.

Покажем, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством «счастливых» 6-значных номеров и множеством 6-значных номеров с суммой цифр 27.

Это соответствие задается так. Заменим в произвольном«счастливом» номере последние три цифры на цифры, дополняющие из до 9 (например, $147624 \to 147375$). Если сумма первых трех (и последних) цифр равна $k$, то после указанного преобразования сумма трех последних цифр станет равной $27-k$, а общая сумма шести цифр будет равна 27.
Таким образом, число счастливых билетов совпадает с числом билетов, сумма цифр у которых равна 27.
Каждый 6-значный номер с суммой цифр k можно рассматривать, как k-выборку, составленную из элементов генеральной совокупности $\left\{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5\right\}$, причем каждый элемент может встречаться не более 9 раз. Пусть $a_k$ - число таких k-выборок.
Производящая функция для последовательности $(a_k)$ (см. выше):

$$A(x) = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^9\right)^6 = \left(\frac{x^{10}-1}{x-1}\right)^6 .$$

Задача, которую мы решаем, сводится к вычислению $a_{27}$.
Воспользуемся базисным фактом теории функций комплексного переменного – теоремой Коши.
***Теорема Коши.*** *Для любого многочлена Лорана $p(z)$ его свободный член $p_0$ равен*

$$p_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{p(z)dz}{z},$$

*где интеграл берется по любой окружности на комплексной плоскости, содержащей внутри себя начало координат.*
Для нашей задачи:

$$a_{27} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|x|=1}\left(\frac{x^{10}-1}{x-1}\right)^6 \frac{dx}{x^{28}} = \left[x = e^{i\varphi}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{10i\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}\right)^6 \frac{ie^{i\varphi}}{e^{28i\varphi}}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{5i\varphi}-e^{-5i\varphi}}{e^{i\varphi/2}-e^{-i\varphi/2}}\right)^6 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 5\varphi}{\sin\left(\varphi/2\right)}\right)^6 d\varphi = \left[y = \frac{\varphi}{2}\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10y}{\sin y}\right)^6 dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 10y}{\sin y}\right)^6 dy.$$

Таким образом, решение классической дискретной задачи записывается с помощью интеграла от тригонометрической функции!

Попробуем оценить значение последнего интеграла. График функции $f(y) = \dfrac{\sin 10y}{\sin y}$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ выглядит так, как показано на рисунке:

В нуле функция достигает своего максимума, равного 10. Вне отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{10};\dfrac{\pi}{10}\right]$ величина функции $f$ не превосходит $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{10}} \approx 3$. Основная составляющая интеграла сосредоточена на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{10};\dfrac{\pi}{10}\right]$. Для оценки вклада этого отрезка методом стационарной фазы. Этот метод позволяет оценить значение интеграла

$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} f^t dy = \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\ln f} dy$$

при $t \to \infty$. При больших значениях $t$ величина интеграла определяется поведением функции $\ln f$ («фазы») в окрестности с стационарной точки 0 (точки, в которой $(\ln f)' = 0$, или, что то же самое, $f' = 0$). В окрестности нуля $f(y) \approx 10\left(1 - \frac{32}{2}y^2\right)$, а $\ln f(y) \approx \ln 10 - \frac{32}{2}y^2$. При больших $t$ имеем

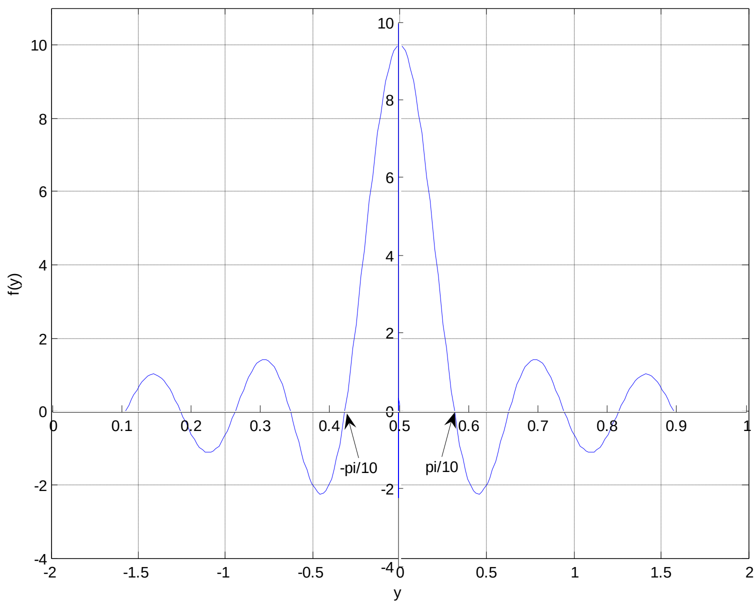
$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\left(\ln 10 - \frac{33}{2}y^2\right)} dy = e^{t\ln 10} \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{-\frac{33}{2}ty^2} dy \approx e^{t\ln 10} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{33t}}.$$

Полагая $t = 6$, получаем окончательный результат:

$$a_k \approx \frac{10^6}{3\sqrt{11\pi}} \approx 56700$$

Полученный результат с хорошей точностью (отклонение составляет не более 3%) приближает искомое значение. Точное значение равно 55252.

Заметим, что задачу о числе счастливых билетов можно решить, зная формулу для числа сочетания с повторениями (см. выше) и метод включения-исключения.




# Формула включения-исключения

Пусть для любого $i$ множество $A_i$ является подмножеством некоторого конечного множества $A$. Обозначим через $\bar{A}_i$ дополнение к $A_i$ до множества $A$: $\bar{A}_i = A \setminus A_i$. Тогда

$$\left|\bar{A}_1 \bigcap \bar{A}_2 \ldots \bigcap \bar{A}_n\right| = |A| - \sum_{i=1}^{n} \left|\bar{A}_i\right| + \sum_{1 \le i < j \le n} \left|\bar{A}_i \bigcap \bar{A}_j\right| - \ldots + (-1)^n \left|A_1 \bigcap A_2 \ldots \bigcap A_n\right|$$

Рассмотрим множество всех расстановок неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шести позициях и введем шесть свойств таких расстановок. $i$ - ое свойство состоит в том, что число в $i$ - ой позиции не меньше 10. Число счастливых билетов равно числу указанных расстановок, не обладающих ни одним из шести таких свойств.
Число всех расстановок неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шести позициях есть $|A| = C_{32}^5$ (сочетание с повторениями из 6 по 27). Далее, для любого $i$ $|\overline{A}_i| = C_{22}^5$.
Действительно, мы можем поставить в $i$ - ую позицию число 10, а оставшуюся сумму 17 произвольно распределить по шести позициям. Аналогично для любой пары $\left|\overline{A}_i \bigcap \overline{A}_j\right| = C_{12}^5$: мы ставим число 10 в $i$ - ую и $j$ - ую позиции, а оставшуюся сумму 7 произвольным образом распределяем по шести позициям. Заметим, что остальные слагаемые в формуле включения-исключения для этой задачи равны нулю, так как расстановки неотрицательных чисел с суммой 27 в шести позициях не могут обладать более, чем двумя свойствами одновременно. Таким образом, число счастливых билетов равно

$$C_{32}^5 - 6C_{22}^5 + 15C_{12}^5.$$

# Теория Пойа

При решении ряда перечислительных задач комбинаторные объекты могут естественным образом отождествляться.
Примерами могут служить задача о числе различных ожерелий из n бусинок, где каждая окрашена в один из k цветов, задача о перечислении изомеров органических молекул заданной структуры, задача о компостере. Для таких комбинаторных объектов характерно то, что некоторые из них можно отождествить за счет вращений (трехмерная структура молекулы), осевой симметрии (рисунок компостера) или поворота (ожерелье, компостер).
В теории Пойа, названной так в честь американского математика венгерского происхождения, подсчет числа элементов некоторого множества осуществляется с точностью до отношения эквивалентности, заданного на данном множестве при помощи указания некоторой группы подстановок, действующей на данном множестве. В результате применения теории Пойа для числа классов эквивалентности различных видов строится производящая функция. Теория Пойа является хорошим примером демонстрации возможностей алгебраического аппарата при решении комбинаторных задач.
Пусть $S$ - n-элементное множество. *Подстановкой* на множестве $S$ называется взаимно-однозначное отображение $S$ на себя.
Образ элемента $s \in S$ при действии на него подстановкой $\pi : S \to S$ будем обозначать $\pi s$. *Тождественная подстановка* $\varepsilon$ переводит каждый элемент $S$ в себя:

$$\forall s \in S \quad \varepsilon s = s$$

*Произведением* $\pi_1\pi_2$ подстановок $\pi_1$ и $\pi_2$ на множестве $S$ назовем их композицию – подстановку, определяемую последовательным выполнением данных подстановок:

$$\forall s \in S \quad (\pi_1\pi_2)s = \pi_1(\pi_2 s).$$

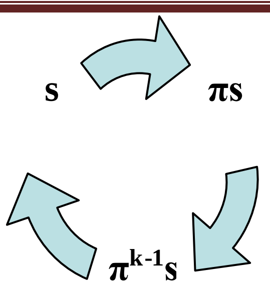
Операция умножения подстановок обладает свойством ассоциативности, а значит степень $(\pi^n)$ определяется как n-кратное произведение $\pi \cdot \pi \cdot \ldots \cdot \pi = \pi^n$.
Если некоторое множество подстановок на $S$

1) замкнуто относительно операции умножения;
2) содержит тождественную подстановку;
3) вместе с каждой подстановкой содержит ей обратную,

то оно образует *группу*, в которой в роли нейтрального элемента выступает тождественная подстановка $\varepsilon$, а умножение подстановок является (групповой) бинарной операцией.
Самой «бедной» (по числу ее элементов) является группа, содержащая лишь $\varepsilon$. Самая «богатая» группа содержит все подстановки на множестве $S$, их число совпадает с числом перестановок $n$ элементов и равно $n!$. Такую группу называют симметрической и обозначают $S_n$.
Зафиксируем некоторый элемент $s \in S$ и рассмотрим последовательность

$$s, \pi s, \pi^2 s, \pi^3 s, \ldots.$$

Данная последовательность не может содержать бесконечное число различных элементов ввиду конечности множества $S$. Первый элемент, который повторно встретится в последовательности, есть $s$. Наименьшее натуральное число $k$ такое, что $\pi^k s = s$, называют порядком элемента $s$. Последовательность $s, \pi s, \pi^2 s, \pi^3 s, \pi^{k-1} s$ называют *орбитой* (или *циклом*) элемента $s$.
Элементы орбиты циклически переставляются подстановкой $\pi$.




Возьмем какой-нибудь элемент, не входящий в орбиту $s$ (если конечно такой элемент существует, что будем в случае, когда орбита $s$ не исчерпывает всего множества $S$); он порождает свою орбиту, не имеющей общих элементов с орбитой $s$. Если при этом остались элементы множества $S$, не вошедшие в построенные орбиты, то можно указать еще одну орбиту и т.д. В результате множество $S$ разбивается на непересекающиеся орбиты (каждая подстановка, вообще говоря, задает свое разбиение $S$).

Длиной орбиты называют число ее элементов. Если подстановка разбивает множество $S$ на $k_1$ орбит длины 1, $k_2$ длины 2, … $k_n$ орбит длины $n$, то говорят, что подстановка имеет тип $\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right)$. Сумма длин всех орбит равна числу элементов множества $S$:

$$\sum_{i=1}^{n} ik_i.$$

*Цикловым индексом подстановки* называют одночлен

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

где $\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right)$ - тип подстановки.

*Цикловым индексом группы подстановок* $G$ называют среднее арифметическое цикловых индексов ее элементов:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{G}\sum_{g\in G} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

## *Примеры*

1) Тождественная подстановка $\varepsilon$ порождает $n$ орбит длины 1, поэтому цикловой индекс группы, состоящей только из тождественной подстановки, равен:

$$P_{\{\varepsilon\}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{n}.$$

2) Найдем циклового индекс группы подстановок вершин тетраэдра, порожденных его вращениями.

Вращение тетраэдра вокруг его высоты на $120^0$ в любом направлении задает подстановку на множестве вершин, имеющую тип $\left(1, 0, 1, 0\right)$ (вершина, через которую проходит высота, при вращении остается на месте, три другие вершины циклически переставляются, образуя цикл длины 3). Всего имеем 8 таких вращений, соответственно 8 подстановок, имеющий цикловой индекс $x_1^1 x_3^1$.

Вращение тетраэдра на $180^0$ вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, порождает подстановку типа $\left(0, 2, 0, 0\right)$ (концы каждого из указанных ребер меняются местами при повороте, образуя 2-элементную орбиту). Поэтому в группе подстановок имеется трип подстановки с цикловым индексом $x_2^2$.

Учтя, наконец, тождественную подстановку, имеющую цикловой индекс $x_1^4$, запишем цикловой индекс рассматриваемой группы:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{12}\left(8x_1x_3 + 3x_2^2 + x_1^4\right).$$

Пусть $R^D = \{ f : D \to R \}$ - множество всевозможных функций с областью определения $D$ и принимающих значения на множестве $R$, где $R$ и $D$ - некоторые конечные множества. Каждую такую функцию можно отождествить с размещением с повторениями из $|R|$ элементов по $|D|$; поэтому $\left|R^D\right| = \left|R\right|^{|D|}$.

Пусть $G$ - группа подстановок, действующих на множестве $D$. Назовем функции $f_1$ и $f_2$ из $R^D$ *эквивалентными* ( $f_1 \sim f_2$), если для некоторой подстановки $g \in G$ $f_1(g) = f_2$, т.е.

$$\forall d \in D \quad f_1\big(g(d)\big) = f_2(d).$$

Введенное отношение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, транзитивности, симметричности.

Каждому элементу $r$ множества $R$ придадим некоторый *вес* $w(r)$. (Вес – это элемент некоторого коммутативного кольца.) *Весом функции* $f \in R^D$ назовем произведения весов образов всех элементов множества $D$ при отображении $f$:

$$W(f) = \prod_{d \in D} w(f(d)).$$

**Пример.**

Пусть $D = \{1, 2, 3, 4\}$ - множество вершин тетраэдра;

$R = \{\text{синий, красный, зеленый, белый}\} = \{\text{с,к,з,б}\}$ - множество цветов. Тогда $R^D$ - множество всевозможных раскрасок вершин тетраэдра в указанные цвета. С помощью $G$ - группы подстановок вершин, возникающих в результате вращений тетраэдра, множество $R^D$ разбивается на классы эквивалентности. Класс эквивалентности составляют раскраски, переходящие друг в друга в результате вращений тетраэдра, такие раскраски будем называть геометрически неразличимыми. Например, с точность до геометрической неразличимости существует ровно одна раскраска, при которой три вершины – белые, а одна – синяя. Каждому элементу множества $R$ придадим вес: $w(\text{с}) = x$; $w(\text{к}) = y$; $w(\text{з}) = z$; $w(\text{б}) = t$. Вес упомянутой выше раскраски равен $xt^3$.

**Теорема** (без доказательства).

*Эквивалентные функции имеют одинаковый вес:*

$$f_1 \sim f_2 \Rightarrow W(f_1) = W(f_2).$$

*Теперь становится корректным следующее определение. Весом класса эквивалентности называется вес любой функции из этого класса; если $F$ - класс эквивалентности и $f \in F$, то $W(F) = W(f)$.*

Заметим, что и у неэквивалентных функций могут совпадать веса.

**Теорема Д. Пойа (1937 г.).** *Сумма весов классов эквивалентности рана*

$$\sum_F W(F) = P_G\left(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R} w^2(r), \sum_{r\in R} w^3(r), \ldots\right),$$

*где $P_G$ - цикловой индекс группы подстановок $G$.*

**Следствие.** *Число классов эквивалентности равно* $P_G\left(|R|, |R|, |R|, \ldots\right)$.

Действительно. Если положить вес каждого элемента $R$ равным 1, то и вес каждой функции, и, значит, каждого класса эквивалентности будет равен 1; поэтому сумма весов всех классов эквивалентности будет равна их числу.

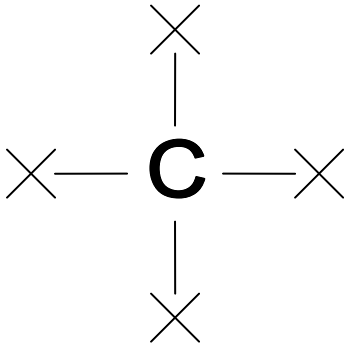
***Примеры.***

***1)*** Воспользуемся теоремой Пойа для ***подсчета числа существенно различных раскрасок вершин тетраэдра в k цветов.*** Так как цикловой индекс группы подстановок вершин тетраэдра, порожденных его вращениями, равен:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{12}\left(8x_1x_3 + 3x_2{}^2 + x_1{}^4\right).$$

Применив следствие теоремы Пойа, получим

$$\frac{1}{12}\left(11k^2 + k^4\right).$$



***2) Задача о перечислении числа изомеров органических молекул заданной структуры***, где $C$ - атом углерода, а места, обозначенные крестиками, могут занимать метил $(CH_3)$, этил $(C_2H_5)$, водород $(H)$ и хлор $(Cl)$.
Математическая модель этих молекул – тетраэдр, в центре которого расположен атом углерода.
Расположение в вершине тетраэдра определенной группы атомов будем считать покраской вершины в определенный цвет (один из четырех). Таким образом, задача сведена к предыдущей (при $k = 4$). Общее число молекул равно $\frac{1}{12}\left(11\cdot 4^2 + 4^4\right) = 36.$

Для того чтобы подсчитать число молекул с фиксированным числом атомов водорода, положим:

$$w(H) = x; \quad w(Cl) = w(CH_3) = w(C_2H_5) = 1.$$

Тогда вес молекулы с $i$ атомами водорода будет равен $x^i$. Применяя теорему Пойа, получим:

$$P_G\left(x+3,\ x^2+3,\ x^3+3,\ x^4+3\right) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 11x + 15.$$

Значит, существует одна молекула $CH_4$ (метан), три молекулы с 3 атомами водорода, шесть молекул с 2 атомами водорода и 15 молекул без атомов водорода.
***3) Задача о числе ожерелий.*** Имеется неограниченный запас бусинок $k$ цветов. Сколько можно составить различных ожерелий из $n$ бусинок (ожерелья, получаемые плоскими вращениями не будем различать)?
Считая, что бусинки располагаются в вершинах правильного n-угольника, сведем задачу к задаче о числе геометрически различных (т.е. не получающихся друг из друга вращениями в плоскости) раскрасок вершин правильного n-угольника в $k$ цветов. При этом $D$ - множество вершин, $R$ - множество цветов, $|D| = n$, $|R| = k$; $R^D$ - множество раскрасок. Отношение эквивалентности на множестве $R^D$ задается с помощью $G$ - группы подстановок вершин, порожденной вращениями правильного n-угольника; $|G| = n$.
Пусть $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, где $g_j$ - подстановка, возникающая в результате поворота на угол $\frac{2\pi}{n} j$ ($j = 1, \ldots, n$) (в частности, тождественная подстановка $\varepsilon = g_n$). Тогда, если отождествить вершину с ее номером, положив $D = \{1, 2, \ldots, n\}$ (номера проставляются по порядку против часовой стрелки), то подстановка $g_j$ описывается соотношением:

$$g_j(i) \equiv i + j \pmod{n}.$$

Длину орбиты произвольного элемента можно найти как наименьшее натуральное число $k$, для которого $kj$ делится на $n$. Если $(n, j)$ - наибольший общий делитель $j$ и $n$, то

$j = j_1(n,j)$, $n = n_1(n,j)$, где $j_1$ и $n_1$ - взаимно простые числа. Поэтому $kj = kj_1(n,j)$ делится $n = n_1(n,j)$ тогда и только тогда, когда $k$ делится на $n_1$, наименьшее натуральное $k$ с таким свойством равно $n_1 = \frac{n}{(n,j)}$. Итак при повороте на угол $\frac{2\pi}{n} j$ все орбиты имеют длину $(n,j)$. Запишем цикловой индекс группы подстановок:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{\frac{n}{(n,j)}}\right)^{(n,j)}.$$

По следствию из теоремы Пойа общее число раскрасок $N$ выражается формулой:

$$N = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k^{(n,j)}.$$

В полученной сумме показатели степеней $k$ принимают значения делителей числа $n$. Несложно видеть, что общее количество чисел из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, для которых их наибольший делитель с $n$ равен $d$, где $d \mid n$, совпадает с количеством натуральных чисел, не превосходящих число $\frac{n}{d}$ и взаимно простых с ним, т.е. равно $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ ($\varphi$ - функция Эйлера). Таким образом,

$$N = \frac{1}{n}\sum_{d|n} k^d \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

***Упражнение.*** На листках бумаги пишутся числа от 00000 до 99999. Будем считать, что при переворачивании цифры 0, 1, 8 не меняются, а цифры 6 и 9 переходят друг в друга. Например, для чисел 06981 и 18690 можно приготовить только один листок. Сколько всего понадобится листков?

Числа Каталана.

Числом Каталана $c_n$ называется число различных правильных скобочных структур из $n$ пар скобок.

Удобно полагать $c_0 = 1$. Тогда последовательность чисел Каталана начинается так:

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 5,\quad 14,\quad 42,\quad 132,\quad \ldots$$

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Каталана, найдем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел.

Всякая правильная скобочная структура удовлетворяет следующим двум условиям:

1) число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;
2) число левых скобок в любом начальном отрезке правильной скобочной структуры не меньше числа правых скобок.

Наоборот, всякая (конечная) скобочная структура, удовлетворяющая условиям 1) и 2) является правильной.

В правильной скобочной структуре все скобки разбиваются на пары: каждой левой скобке соответствует парная ей правая. Парная правая скобка выделяется следующим правилом: это первая правая скобка справа от данной левой скобки, такая, что между выбранными двумя скобками стоит правильная скобочная структура.

Рассмотрим в правильной скобочной структуре из $n+1$ пар скобок пару скобок, в которую входит самая левая скобка структуры. Тогда последовательность скобок внутри этой пары образует правильную скобочную структуру и последовательность скобок вне этой пары образует правильную скобочную структуру. Если число пар скобок во внутренней скобочной структуре равно $k$, то во внешней структуре $n-k$ пар скобок. Наоборот, по каждой паре скобочных структур из $k$ и $n-k$ пар скобок можно

восстановить структуру из $n+1$ пар скобок, заключив первую структуру в скобки и приписав к результату справа вторую структуру.
Отсюда мы получаем рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \ldots + c_n c_0 .$$

Рассмотрим производящую функцию для чисел Каталана:

$$Cat(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

Возведем ее в квадрат и умножим результат на $x$, получим

$$cCat^2(x) = c_0{}^2 x + \left(c_0 c_1 + c_1 c_0\right) x^2 + \left(c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0 .\right) x^3 + \ldots =$$

$$= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots = Cat(x) - c_0 = Cat(x) - 1,$$

Что дает нам квадратное уравнение на производящую функцию

$$xCat^2(x) - Cat(x) + 1 = 0,$$

откуда

$$Cat(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

(Второй корень отбрасывается, так как $\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{x} + \ldots$ содержит отрицательные степени $x$.)
Согласно биному Ньютона

$$c_n = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot 4^{n+1}}{2(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}.$$

Можно получить и более простое рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} c_n .$$

Числа Каталана перечисляют самые разнообразные комбинаторные объекты.
Это и число различных триангуляции выпуклого многоугольника (разбиение многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники), число способов расставить 2n людей в очередь за покупкой товара в 50 руб., если у n человек есть только купюра в 100 руб., а у n человек - купюра в 50 руб., при этом изначальна кассам магазина пуста, и никто не хочет ждать свою сдачу.

# Формальные грамматики с однозначным выводом. Теорема Лагранжа.

Снова рассмотрим правильные скобочные структуры, описываемые числами Каталана. Если обозначить левую скобку буквой $a$, а правую $b$, то можно переписать правильные скобочные структуры в виде «слов» в алфавите $\{a,b\}$.

**Определение**. Пусть $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ - произвольный конечный набор различных букв. *Словом* в алфавите $A$ называется произвольная конечная последовательность букв $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$, где $\alpha_i\in A$ $i=1,\ldots,m$. Число $m$ называется *длиной слова*. *Языком над алфавитом* $A$ называется произвольное (конечное или бесконечное) множество слов в алфавите $A$.

*Пустое слово* $\lambda$ имеет длину 0 и может входить или не входить в язык.

Множество правильных скобочных структур вместе с пустой структурой образует язык над алфавитом $\{a,b\}$. Этот язык называется *языком Дика*.

*Производящей функцией языка* $L$ называется производящая функция

$$L(x)=l_0+l_1x+l_2x^2+\ldots,$$

где $l_k$ есть число слов длины $k$ в языке $L$.

Рассмотрим *правила вывода в языке Дика*:

$$1)\quad r\to\lambda;$$

$$2)\quad r\to arbr.$$

Действительно, всякое слово в языке Дика есть либо

1) пустое слово, либо
2) слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и после этой пары стоит слово языка Дика.

Вычислим с помощью правил вывода производящую функцию для языка Дика. Для этой цели напишем «некоммутативный производящий ряд», перечисляющий слова языка. Этот ряд представляет собой просто формальную сумму всех слов языка, выписанных в порядке возрастания длины:

$$D(a,b)=\lambda+ab+aabb+abab+aaabbb+aababb+\ldots$$

**Теорема.** Этот ряд удовлетворяет уравнению

$$D(a,b)=\lambda+aD(a,b)bD(a,b).$$

Доказательство основано на правилах вывода языка.

Чтобы перейти от некоммутативного производящего ряда к обычному, сделаем подстановку $a=x$, $b=x$, $\lambda=x^0=1$. Тогда получим

$$D(x,x)=1+x^2D^2(x,x).$$

Отсюда обозначив $D(x,x)$ через $d(x)$, получим

$$d(x)=1+x^2d^2(x).$$

Решение

$$d(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}$$

Этого уравнения, конечно же, совпадает (с точностью до возведения формальной переменной в квадрат) с производящей функцией для чисел Каталана. Необходимость подстановки переменной $x^2$ вместо $x$ объясняется тем, что в языке Дика длина слова, составленного из $n$ пар скобок, равна $2n$, тогда как ранее мы перечисляли эти слова по числу пар скобок.

**Определение.** Слово $w = \beta_1 \dots \beta_m$ языка $L$ называется *неразложимым* в этом языке, если никакое его непустое подслово $\beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_{i+l}$, $1 \le i,\ i+l \le m,\ l \ge 0$, отличное от самого слова $w$, не принадлежит языку $L$.

В частности, пустое слово в любом языке, содержащим его, неразложимо. Предположим, что язык $L$ обладает следующими свойствами:

1) пустое слово входит в язык $L$;

2) начало всякого неразложимого слова не совпадает с концом другого или того же самого неразложимого слова;

3) если между любыми двумя буквами любого слова языка $L$ вставить слово языка $L$, то получится слово языка $L$;

4) если из любого слова языка $L$ выкинуть подслово, входящее в язык $L$, то получится слово языка $L$.

Обозначим через $n(y) = n_0 + n_1 y + n_2 y^2 + \dots$ производящую функцию для числа неразложимых слов языка $L$.

**Теорема** (без доказательства). *Производящая функция для языка $L$, удовлетворяющего свойствам 1)-4), и производящей функцией для подъязыка неразложимых слов в нем связаны между собой уравнением Лагранжа*

$$l(x) = n\left(xl(x)\right).$$

**Пример.** Для языка Дика $n(y) = 1 + y^2$. Неразложимые слова – это $\lambda$ и $ab$. Отсюда немедленно получаем уравнение $l(x) = 1 + \left(xl(x)\right)^2$ на производящую функцию для языка Дика.

Уравнение Лагранжа – функциональное уравнение, связывающее между собой производящие функции для числа слов в языке и числа неразложимых слов в нем. Оказывается, если одна из функций известна, то оно всегда разрешимо.

Приведем уравнение к классическому виду. Положим $xl(x) = \tilde{l}(x)$. Тогда уравнение Лагранжа примет вид:

$$\tilde{l}(x) = xn(\tilde{l}(x)).$$

**Теорема Лагранжа.** *Пусть задана одна из производящих функций $\tilde{l}(x)$ ($\tilde{l}_0 = 0$, $\tilde{l}_1 \ne 0$) или $n(y)$ ($n_0 \ne 0$). Тогда вторая производящая функция однозначно восстанавливается по ней из уравнения $\tilde{l}(x) = xn(\tilde{l}(x))$.*

# Обобщения метода включения исключения

Напомним в чем заключается “Метод включения-исключения”.
Классическая формула.
Для любых конечных множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ справедливо

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|X_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n}\left|X_{i_1}\bigcap X_{i_2}\right| + \ldots (-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots i_k\le n}\left|X_{i_1}\bigcap X_{i_2}\ldots\bigcap X_{i_k}\right| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n\left|X_1\bigcap X_2\ldots\bigcap X_n\right|$$

Эта формула легко доказывается индукцией по $n$. База индукции:

$$\left|X\bigcup Y\right| = |X| + |Y| - \left|X\bigcap Y\right|,$$

что справедливо в силу правила суммы для любых конечных множеств $X, Y$:

$$\left|X\bigcup Y\right| = \left|X\bigcap Y\right| + \left|X \setminus X\bigcap Y\right| + \left|Y \setminus X\bigcap Y\right| =$$
$$= \left|X\bigcap Y\right| + \left(|X| - \left|X\bigcap Y\right|\right) + \left(|Y| - \left|X\bigcap Y\right|\right) =$$
$$= \left|X\bigcup Y\right| = |X| + |Y| - \left|X\bigcap Y\right|.$$

Далее, полагая $X = \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i, Y = X_n$, получаем формулу.

Обобщим теперь классическую формулу включения-исключения.
Рассмотрим $N$ элементов $a_1, a_2, \ldots, a_N$, которым соответственно приписаны веса $w(a_1), w(a_2), \ldots, w(a_N)$, являющиеся элементами некоторого коммутативного кольца $K$.
Каждый из заданных элементов может обладать или не обладать некоторыми свойствами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Обозначим через $M(r)$ суммарный вес элементов, обладающих точно $r$ свойствами, а через $M_r$ - суммарный вес элементов, обладающих не менее чем $r$ свойствами. Покажем, что

$$M(r) = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r} C_k^r S_k, \quad r = 0,1,\ldots,n,$$

$$M_r = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r} C_{k-1}^{r-1} S_k, \quad r = 0,1,\ldots,n,$$

где

$$S_0 = \sum_{i=1}^{N} w(a_i), \quad S_k = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots i_k\le n} M\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right), \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

$M\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right)$ - суммарный вес элементов, обладающих фиксированными свойствами $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$.

Для доказательства первого тождества покажем, что в правую часть равенства входят все веса элементов, обладающих $r$ свойствами, и только они.
Веса элементов, обладающих точно $r$ свойствами, учитываются один раз в сумме $S_r$ и не входят в остальные суммы $S_{r+1}, \ldots, S_n$. Веса элементов, обладающих $\mu > r$ свойствами, в сумме $S_k$, $k > r$, учитываются $C_\mu^k$ раз. Поэтому в правую часть доказываемого равенства вес таких элементов входит с коэффициентом:

$$\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^r C_\mu^k = C_\mu^r \sum_{j=0}^{\mu-r}(-1)^j C_{\mu-r}^j = 0.$$

Веса элементов, обладающих $\mu < r$ свойствами, не входят в правую часть доказываемого тождества.

Справедливость второго тождества вытекает из следующего:

$$M_r = \sum_{j=r}^{n} M(j) = \sum_{j=r}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{k-j}C_k^j S_k = \sum_{k=r}^{n} S_k \sum_{j=r}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j .$$

Сумма

$$\sum_{j=r}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j = \sum_{j=0}^{k-r}(-1)^j C_k^j$$

Есть коэффициент при $x^{k-r}$ в выражении $(1-x)^k(1-x)^{-1}$. С другой стороны, этот коэффициент равен $(-1)^{k-r}C_{k-1}^{k-r}$.

Если $w(a_1) = w(a_2) = \ldots = w(a_N) = 1$, то $M(r)$ представляет собой число элементов, обладающих ровно $r$ свойствами из числа заданных $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если $\Psi_i$ - множество элементов, обладающих свойством $A_i$, $i = 1,\ldots,n$, то число элементов, обладающих одновременно свойствами $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$, равно $M\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right) = \left|\Psi_{i_1}\bigcap\Psi_{i_2}\bigcap\ldots\bigcap\Psi_{i_k}\right|$.

Кроме того, число элементов, обладающих хотя бы одним из свойств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, равно $M_1 = \left|\bigcup_{i=1}^{n}\Psi_i\right|$, таким образом, получается классическая формула включения-исключения.

**Неравенства Бонферрони.**

Будем предполагать, что элементы коммутативного кольца $K$, определяющего веса элементов $a_1, a_2, \ldots, a_N$, являются неотрицательными числами. В этом предположении выведем неравенства, которые в ряде случаев упрощают применение метода включения-исключения, так как в пределах допустимой точности позволяют ограничиться подсчетом в знакопеременной сумме $M(r) = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^r S_k$ лишь нескольких членов.

Для $r+1 \le d \le n$ имеем:

$$M(r) - \sum_{k=r}^{d-1}(-1)^{k-r}C_k^r S_k = (-1)^{d-r}U(d,r),$$

где $U(d,r) = \sum_{k=d}^{n}(-1)^{k-d}C_k^r S_k$.

Сначала выразим величины $S_k$, $k = 0,1,\ldots,n$ через $M(r)$, $r = 0,1,\ldots,n$:

$$\sum_{r=k}^{n}C_r^k M(r) = \sum_{r=k}^{n}C_r^k\sum_{l=r}^{n}(-1)^{l-r}C_l^r S_l = \sum_{l=k}^{n}S_l\sum_{r=k}^{l}(-1)^{l-r}C_r^k C_l^r .$$

Выражая биноминальные коэффициенты через факториалы, получаем:

$$\sum_{r=k}^{l}(-1)^{l-r}C_r^k C_l^r = C_l^k\sum_{r=k}^{l}(-1)^{l-r}C_{l-k}^{l-r} = C_l^k\sum_{j=0}^{l-k}(-1)^j C_{l-k}^j = \begin{cases}1, & l = k,\\ 0, & l > k.\end{cases}$$

Поэтому получаем:

$$S_k = \sum_{r=k}^{n}C_r^k M(r), \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

В силу этого равенства можно переписать:

$$U(d,r)=\sum_{k=d}^{n}(-1)^{k-d}C_k^rS_k=\sum_{k=d}^{n}(-1)^{k-d}C_k^r\sum_{j=k}^{n}C_j^kM(j)=\sum_{j=d}^{n}M(j)\sum_{k=d}^{j}(-1)^{k-d}C_k^rC_j^k.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=d}^{j}(-1)^{k-d}C_k^rC_j^k=C_j^r\sum_{k=d}^{j}(-1)^{k-d}C_{j-r}^{k-r}=C_j^r\sum_{l=0}^{j-d}(-1)^{j-l-d}C_{j-r}^{l}$$

При этом $\sum_{l=0}^{j-d}(-1)^{j-l-d}C_{j-r}^{l}$ есть коэффициент при $x^{j-d}$ в разложении $(1+x)^{j-r}(1+x)^{-1}$. С другой стороны, он равен $C_{j-r-1}^{j-d}$. Поэтому окончательно получаем:

$$U(d,r)=\sum_{j=d}^{n}C_{j-r-1}^{d-r-1}C_j^rM(j)\geq 0.$$

С учетом этого неравенства, получаем:

$$M(r)-\sum_{k=r}^{r+2\nu-1}(-1)^{k-r}C_k^rS_k=(-1)^{2\nu}U(r+2\nu,r)\geq 0,$$

$$M(r)-\sum_{k=r}^{r+2\nu}(-1)^{k-r}C_k^rS_k=(-1)^{2\nu+1}U(r+2\nu+1,r)\leq 0.$$

Из этих двух соотношений вытекают так называемые неравенства Бонферрони:

$$\sum_{k=r}^{r+2\nu-1}(-1)^{k-r}C_k^rS_k=(-1)^{2\nu}U(r+2\nu,r)\leq M(r)\leq\sum_{k=r}^{r+2\nu}(-1)^{k-r}C_k^rS_k=(-1)^{2\nu+1}U(r+2\nu+1,r),$$

где $0\leq\nu\leq{(n-r)}/{2}$.

Из этих неравенств следует, что, отбрасывая в сумме $M(r)=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^rS_k$ слагаемые, начиная с некоторого, мы получим погрешность, знак которой совпадает со знаком первого из отброшенных членов, а абсолютная величина погрешности не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных членов.

**Задача о беспорядках.**

Перестановка $\pi$ элементов множества $\{1,2,\ldots,n\}$ называется беспорядком, если $\pi(k)\neq k$ ни при каких $k=1,\ldots,n$. Обозначим через $d_n$ число беспорядков на множестве из $n$ элементов.

Чтобы посчитать число беспорядков, введем $n$ свойств перестановок на множестве из $n$ элементов. Свойство $c_i$ состоит в том, что перестановка оставляет на месте элемент $i$. Число всех перестановок равно $n!$ Число перестановок, удовлетворяющих свойству $c_i$, равно $(n-1)!$: мы фиксируем $i$-й элемент, а остальные переставляем произвольно. Число перестановок, удовлетворяющих свойствам $c_i$ и $c_j$ равно $(n-2)!$: два элемента фиксируются, остальные переставляются произвольно. Вообще, число перестановок, удовлетворяющих $m$ фиксированным свойствам, равно $(n-m)!$. Таким образом,

$$d_n=C_n^0n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!-\ldots=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

Этой задаче можно придать такую интерпретацию: группа из $n$ фанатов выигрывающей футбольной команды на радостях подбрасывают в воздух свои шляпы. Шляпы возвращаются в случайном порядке – по одной к каждому болельщику. Какова вероятность того, что никому из фанатов не вернется своя шляпа?

Из описанного выше, получаем, что искомая вероятность равна

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\underset{n\to\infty}{\to} e^{-1}.$$

## Общий подход.

Зафиксируем некоторую последовательность $\{\alpha_n\}$. Каждой последовательности $\{a_n\}$ мы можем сопоставить производящую функцию

$$\{a_n\}\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}a_n\alpha_n x^n,$$

определяемую последовательностью $\{\alpha_n\}$. Если в последовательность $\{\alpha_n\}$ отсутствуют нулевые элементы, то такое сопоставление однозначно. Если $\alpha_n\equiv 1$, то получаем обычную производящую функцию. Если $\alpha_n=\frac{1}{n!}$ - экспоненциальную производящую функцию.

Операции с обычными производящими функциями уже были описаны выше. Посмотрим на поведение экспоненциальных производящих функций.

Сумма ведет себя обычным образом, а вот произведение иначе:

$$C(x)=A(x)B(x)=\left(\frac{a_0}{0!}+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots\right)\left(\frac{b_0}{0!}+\frac{b_1}{1!}x+\frac{b_2}{2!}x^2+\cdots\right)=\frac{c_0}{0!}+\frac{c_1}{1!}x+\frac{c_2}{2!}x^2+\cdots$$

где $c_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k b_{n-k}$ - биномиальная свертка.

Покажем, что экспоненциальная производящая функция для числа беспорядков, есть $D(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{n!}x^n=\frac{e^{-x}}{1-x}$.

Обозначим, за $d_{n,k}$ - число перестановок на множестве из $n$ элементов, оставляющих на месте ровно $k$ элементов (то есть число неподвижных точек равно $k$). При таком обозначении $d_{n,0}=d_n$. Более того, $d_{n,k}=C_n^k d_{n-k}$ ($C_n^k$ способами можно выбрать $k$ неподвижных элементов, а остальные $n-k$ образуют беспорядок). Из правила суммы, получаем:

$$n!=\sum_{k=0}^{n}d_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^{n-k}d_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d_k.$$

То есть получилась биномиальная свертка:

$$a_k=d_k,\quad b_k=1,\quad c_k=k!$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{n!}x^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-x}=D(x)e^x$$

**Задача.** Сколько существует остовных деревьев в полном графе с $n$ вершинами $\{1,2,\ldots,n\}$?

**Решение.**

Обозначим это число $t_n$. Полный граф содержит $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер, так что по существу ищется число способов соединить $n$ объектов, проведя только $n-1$ ребер.

Выделим одну вершину и посмотрим на те связные компоненты или блоки, на которое разобьется остовное дерево, если проигнорировать все ребра, проходящие через выделенную вершину. Если невыделенные вершины образуют $m$ компонент размеров $k_1, k_2, \ldots, k_m$, то их можно соединить с выделенной вершиной $k_1 k_2 \cdots k_m$ способами. Такие рассуждения приводят к рекуррентному соотношению

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n-1} \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_m} k_1 k_2 \cdots k_m \, t_{k_1} t_{k_2} \cdots t_{k_m},$$

при любом $n>1$. Действительно, имеется $\binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \dfrac{(n-1)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$ (полиномиальный коэффициент) способов представить $n-1$ объект в виде последовательности из $m$ компонент размеров, соответственно, $k_1, k_2, \ldots, k_m$; имеется $t_{k_1} t_{k_2} \cdots t_{k_m}$ способов соединить вершины внутри этих компонент какими-то остовными деревьями; имеется $k_1 k_2 \cdots k_m$ способов соединить вершину $n$ с этими компонентами; далее надо разделить на $m!$, так как не должен учитываться порядок компонент.

Теперь обозначим $u_n = n t_n$, тогда рекуррентное соотношение примет следующий вид:

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \frac{u_{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{u_{k_m}}{k_m!}, \quad n>1.$$

Обозначим за $U(x)$ ЭПФ для последовательности $\{u_n\}$ (то есть $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ ). Тогда правая часть полученного соотношения есть коэффициент при $x^{n-1}$ в разложении $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} U^m(x) = e^{U(x)}$ или по-другому, коэффициент при $x^n$ в $xe^{U(x)}$. В то же время, слева - коэффициент при $x^n$ в $U(x)$. Таким образом,

$$U(x) = xe^{U(x)}$$

Заметим, что числа $t_n$ можно интерпретировать, как число помеченных деревьев на $n$ вершинах. Если в дереве выделить одну вершину и назвать ее корнем, то получим корневое помеченное дерево. .Так как выделить в качестве корня среди $n$ помеченных вершин дерева можно $n$ способами, то последовательность чисел $u_n$ есть число помеченных корневых деревьев на $n$ вершинах.

Итак, ЭПФ для числа помеченных корневых деревьев удовлетворяет уравнению Лагранжа

$$U(x) = xe^{U(x)}.$$

Для нахождения явной формулы для этой последовательности, можно воспользоваться следующим уточнением теоремы Лагранжа.

**Теорема.** *Пусть функции* $\varphi = \varphi(x)$ *(* $\varphi(0) = 0$ *) и* $\psi = \psi(z)$ *связаны между собой уравнением Лагранжа*

$$\varphi(x) = x\psi\left(\varphi(x)\right).$$

*Тогда коэффициенты при* $x^n$ *в функции* $\varphi$ *равен коэффициенту при* $z^{n-1}$ *в разложении*

$$\frac{1}{n}\psi^n(z).$$

Применяя это утверждение к нашей задаче, получаем: $u_n = n^{n-1}$.

То есть число помеченных корневых деревьев на $n$ вершинах равно $n^{n-1}$ (утверждение Кэли), а число помеченных деревьев равно $n^{n-2}$. (или для первоначальной формулировки задачи – число остовных деревьев в полном графе с $n$ вершинами $\{1, 2, \ldots, n\}$ ).

**Задача** (Парадокс дней рождений).
Сколько студентов (в среднем) должно быть в группе, чтобы нашлось хотя бы двое с одинаковым днями рождения?
**Решение.**
Пусть дискретная случайная величина $X$ равна числу человек в произвольном классе, в котором нет совпадающих дней рождений.
Распределение случайной величины $X$:
$P(X>n)=\dfrac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{r^n}$, $r=365$ - число дней в году (не високосном)
Введем обозначение коэффициент при $z^n$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля: $\left[z^n\right]f(z)$. Тогда $P(X>n)=\dfrac{n!}{r^n}\left[z^n\right](1+z)^r=n!\left[z^n\right]\left(1+\dfrac{z}{r}\right)^r$.
Математическое ожидание случайной величины $X$:
$EX=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(X>n)=1+\sum\limits_{n=1}^{r}\dfrac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{r^n}$.
Для подсчета математического ожидания можно не вычислять значение последней суммы, а обратиться к экспоненциальной производящей функции.
*Экспоненциальной производящей функцией (ЭПФ)* последовательности $a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_n,\ \ldots$ называется формальный степенной ряд

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$$

Тогда для последовательности $\left\{a_n=P(X>n)\right\}_{n=0}^{\infty}$ получим ЭПФ $A(z)=\left(1+\dfrac{z}{r}\right)^r$, откуда

$$EX=\sum_{n=0}^{\infty}P(X>n)=\sum_{n=0}^{\infty}n!\left[z^n\right]\left(1+\frac{z}{r}\right)^r=\int_0^{\infty}e^{-t}\left(1+\frac{t}{r}\right)^r dt.$$

В последнем равенстве, мы воспользовались преобразованием Лапласа:
Если $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n z^n$ , то $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\,f_n=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}f(t)dt$.

Далее для приближенного вычисления интеграла $\int\limits_0^{\infty}e^{-t}\left(1+\dfrac{t}{r}\right)^r dt=r\int\limits_0^{\infty}e^{r(\ln(1+u)-u)}du$

воспользуемся методом Лапласа:

$$\int_0^{\infty}f(u)e^{rS(u)}du\approx f(u_0)e^{rS(u_0)}\int_{u_0-\delta}^{u_0+\delta}e^{\frac{rS''(u_0)(u-u_0)^2}{2}}du\ \underset{\substack{r\to\infty\\ \Downarrow\\ \sqrt{-rS''(u_0)}\delta\to\infty}}{\overset{x=\sqrt{-rS''(u_0)}(u-u_0)}{\longrightarrow}}\ \frac{f(u_0)e^{rS(u_0)}}{\sqrt{-rS''(u_0)}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{f(u_0)e^{rS(u_0)}}{\sqrt{-rS''(u_0)}},$$

где $u_0$ - единственная точка максимума вещественнозначной функции $S(u)$ на полубесконечном интервале $(0;+\infty)$. Основная идея асимптотического представления интеграла Лапласа заключается в представлении функции $S(u)$ в окрестности точки максимума $u_0$ в ряд Тейлора.
В нашей задаче $S(u)=\ln(1+u)-u$, $u_0=0$, $f(u)\equiv 1$.

$\int_0^{\infty} e^{r(\ln(1+u)-u)}du \approx \int_0^{\delta} e^{-r\frac{u^2}{2}}du \overset{x=\sqrt{r}u}{=} \frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{\sqrt{r}\delta} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx \frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}$. Значит

$$EX = \int_0^{\infty} e^{-t}\left(1+\frac{t}{r}\right)^r dt = r\int_0^{\infty} e^{r(\ln(1+u)-u)}du \approx \sqrt{\frac{\pi r}{2}}.$$

Так как $r = 365 \gg 1$, то ответ приблизительно 24,6.

***Замечание.*** На эту задачу можно смотреть, как на отображение $[1..n] \to [1..r]$. Вопрос коллизии дня рождений в терминах отображений будет таким: при каком $n$ отображение будет инъективным.

**Задача.** Покажите, что распределение случайной величины $X$ из предыдущей задачи имеет асимптотически распределение Релея при $n = t\sqrt{r}$:

$$P\left\{X > t\sqrt{r}\right\} \sim e^{-\frac{t^2}{2}} \quad P\left\{X = t\sqrt{r}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{r}}te^{-\frac{t^2}{2}}$$

**Решение.**

Для решения задачи воспользуемся знаниями из ТФКП (теорема Коши, седловая точка).

$$P(X > n) = n!\left[z^n\right]\left(1+\frac{z}{r}\right)^r = \frac{1}{n!}\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=\rho}\left(1+\frac{z}{r}\right)^r \frac{dz}{z^{n+1}}$$

В полярных координатах:

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=\rho}\left(1+\frac{z}{r}\right)^r \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{\rho e^{i\theta}}{r}\right)^r \frac{d\theta}{\rho^n e^{in\theta}}$$

Перепишем интеграл в таком виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{r\ln\left(1+\frac{\rho e^{i\theta}}{r}\right)-n\ln\rho-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta,$$

$$f(z) = r\ln\left(1+\frac{z}{r}\right) - n\ln z, \quad z = \rho e^{i\theta};$$

Далее, выберем $\rho$ таким, чтобы точка $z = \rho e^{i\theta}\big|_{\theta=0} = \rho$ была седловой точкой. То есть $f'(z)\big|_{z=\rho} = 0,\ f''(z)\big|_{z=\rho} \neq 0$ (простая седловая точка).

Тогда $f(\rho e^{i\theta}) = f(\rho) - \frac{1}{2}\beta(\rho)\theta^2 + O(\theta^3)$ для $|\theta| < \delta$ (разложение Тейлора) (выбор параметра $\delta$ будет показан ниже), где $\beta(\rho) = \rho^2\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^2 f(z)\right]\Big|_{z=\rho}$.

Отсюда интеграл по части окружности $|z| = \rho$ можно представить:

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta = e^{f(\rho)}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1}{2}\beta(\rho)\theta^2+O(\theta^3)}d\theta = \frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{\beta(\delta)}}\int_{-\delta\sqrt{\beta(\rho)}}^{\delta\sqrt{\beta(\rho)}} e^{-\frac{1}{2}u^2+O(u^3)}du \underset{\beta(\rho)\to\infty}{\to} \frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{\beta(\delta)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}du =$$

$$= \sqrt{2\pi}\,\frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{\beta(\delta)}}.$$

Заметим, что здесь важно, что $\beta(\rho) \to \infty$.

Выбор $\delta$ должен быть таким, чтоб «хвосты» оставшегося интеграла удовлетворяли:

$$\int_{-\pi}^{-\delta} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta = o\left(\int_{-\delta}^{\delta} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta\right); \quad \int_{\delta}^{\pi} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta = o\left(\int_{-\delta}^{\delta} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta\right);$$

Тогда будет справедливо асимптотическое приближение исходного интеграла:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{f(\rho e^{i\theta})}d\theta \approx \frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{2\pi\beta(\rho)}}.$$

В нашей задаче уравнение на седловую точку принимает вид:

$$f'(z)\big|_{z=\rho} = 0,\ f(z) = r\ln\left(1+\frac{z}{r}\right) - n\ln z \Rightarrow \frac{r}{r+\rho} = \frac{n}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{nr}{r-n} = \frac{tr}{\sqrt{r}-t}.$$

Далее

$$\beta(\rho) = \rho^2\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^2 f(z)\right]\Bigg|_{z=\rho} = n\left(1-\frac{n}{r}\right) \overset{n=t\sqrt{r}}{=} t\sqrt{r}\left(1-\frac{t}{\sqrt{r}}\right) = t\sqrt{r} - t^2 \underset{r\to\infty}{\to} \infty$$

$$e^{f(\rho)} = e^{-n\ln n-(r-n)\ln\left(1-\frac{n}{r}\right)} = \frac{1}{n^n}\left(1-\frac{n}{r}\right)^{-(r-n)} = \frac{1}{n^n}\left(1-\frac{n}{r}\right)^{-\frac{r}{n}\left(n-\frac{n^2}{r}\right)} \approx \frac{e^{n-\frac{n^2}{r}}}{n^n} = \left(\frac{e}{n}\right)^n e^{-\frac{n^2}{r}}$$

$$n!\frac{e^{f(\rho)}}{\sqrt{2\pi\beta(\rho)}} = n!\left(\frac{e}{n}\right)^n e^{-\frac{n^2}{r}}\frac{1}{\sqrt{2\pi n\left(1-\frac{n}{r}\right)}} \approx \cancel{n!\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}}\, e^{-\frac{n^2}{r}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{n}{r}\right)}} \overset{n=t\sqrt{r}}{=} e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{t}{\sqrt{r}}\right)}} \underset{r\gg 1}{\to} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

То есть $P\left\{X > t\sqrt{r}\right\} \sim e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Соответственно

$$P\left\{X = t\sqrt{r}\right\} = t\sqrt{r}\,\frac{dP\{X<x\}}{dx}\bigg|_{x=t\sqrt{r}} \sim -t\sqrt{r}\,\frac{de^{-\frac{x^2}{2r}}}{dx}\Bigg|_{x=t\sqrt{r}} = t\sqrt{r}\left(\frac{x}{r}e^{-\frac{x^2}{2r}}\right)\Bigg|_{x=t\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}}te^{-\frac{t^2}{2}}$$

**Задача** («двойственная» задача относительно парадокса дня рождений) Сколько в среднем должно быть студентов на потоке, чтобы каждый день в течение всего года находился хотя бы один студент, празднующий в этот день свой день рождения. (или в терминах отображения $[1..n]\to[1..r]$, при каком $n$ отображение будет сюръективным.)

**Ответ:** 2365

**Задача** (со ссылкой на задачу про заключеных и задачу Вершика о подсчете среднего числа циклов длины r, см. задачи к семинару Стохастический анализ в задачах).

**1)** Доказать, что среднее число циклов в случайной перестановке длины n, имеющих длину от $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ до $n$ рано $\sum_{r=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{n}\frac{1}{r}\underset{n\to\infty}{\to}\ln 2$.

**2)** Доказать, что вероятность того, что в случайной перестановке из n элементов есть только циклы длины от $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ до $n$ рано $\sum_{r=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{n}\frac{1}{r}\underset{n\to\infty}{\to}\ln 2$.