О равновесиях макросистем

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Напомним известные, необходимые нам в дальнейшем, факты из теории марковских процессов [1]. Пусть некоторая система может находиться в одном из n состояний. В начальный момент времени положение системы характеризуется вектором распределения вероятностей: $\vec{p}^T(0) = \left(p_1(0), ..., p_k(0), ..., p_n(0)\right)$, $\sum_{k=1}^{n} p_k(0) = 1$, где $p_k(0) \geq 0$ – вероятность того, что система находилась в момент времени $t = 0$ в состоянии с номером k. Пусть система эволюционирует во времени согласно *матрице переходных вероятностей* $P = \left\| p_{ij} \right\|_{i,j=1,1}^{n,n}$. При этом $0 \leq p_{ij} \leq 1$ – вероятность того, что система перейдет за один шаг из состояния i в состояние j. Очевидно, что $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, $i = 1,..,n$. Такие матрицы также называют *стохастическими матрицами*. Таким образом, распределение вероятностей в момент времени $t = 1$ можно найти по формулам (*полной вероятности*):

$$p_k(1) = \sum_{i=1}^{n} p_i(0)\, p_{ik}, \; k = 1,...,n.$$

Аналогично на любом шаге $(m+1) \in N$:

$$p_k(m+1) = \sum_{i=1}^{n} p_i(m)\, p_{ik}, \; k = 1,...,n.$$

Эти соотношения можно переписать более компактно:

$$\vec{p}^T(m+1) = \vec{p}^T(m) P \text{ (\textit{уравнение Колмогорова–Чэмпена})}.$$

Осуществим предельный переход к непрерывному времени (скейлинг): шаг по времени $\Delta t \to 0+$ и $p_{ij} := \lambda_{ij} \Delta t$, $i \neq j$. Тогда уравнение Колмогорова–Чэмпена перейдет в уравнение:

$$\frac{d\vec{p}^T(t)}{dt} = \vec{p}^T(t) \Lambda \text{ (\textit{уравнение Колмогорова–Феллера})},$$

где $[\Lambda]_{ij} = \lambda_{ij}$ при $i \neq j$ (интенсивности переходов) и $[\Lambda]_{ii} = -\sum_{j:\, j \neq i} \lambda_{ij}$, $i = 1,...,n$. Матрицу Λ называют инфинитезимальной матрицей.

Таким образом для того чтобы задать конечный однородный марковский процесс (цепь) нужно задать начальное распределение вероятностей и инфинитезимальную матрицу (или матрицу переходных вероятностей в случае дискретного времени). В следующем пункте будут рассмотрены конкретные примеры. А сейчас поставим основной вопрос: что будет происходить с марковским процессом на больших временах? Ответ подсказывают выписанные уравнения динамики: $\lim_{m\to\infty}\vec{p}(m)=\vec{p}^{*}$, где $\vec{p}^{*T}=\vec{p}^{*T}P$ (в дискретном времени) и $\lim_{t\to\infty}\vec{p}(t)=\vec{p}^{*}$, где $\vec{p}^{*T}\Lambda=\vec{0}^{T}$ (в непрерывном времени). Так определяемый вектор распределения вероятностей $\vec{p}^{*}$ называется *стационарным* (*инвариантным*) *распределением*. Предельное распределение также называют *финальным распределением*. Выше лишь сказано, что финальные распределения следует искать среди стационарных.

Но, во-первых, где гарантии, что предел существует? Возьмем марквскую цепь с матрицей переходных вероятностей: $P=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$ и начальным состоянием $\vec{p}^{T}(0)=(1 \quad 0)^{T}$. Очевидно, что $\vec{p}^{T}(m)=0.5\cdot\left(1+(-1)^{m},1+(-1)^{m+1}\right)^{T}$ предела в обычном смысле не имеет. Легко при этом проверить, что стационарное распределение $\vec{p}^{*T}=(0.5,0.5)^{T}$ (заметим, что стационарное распределение всегда существует) будет пределом $\vec{p}^{T}(m)$ по Чезаро (см. ниже).

Во-вторых, при каких условиях стационарное распределение единственно? Ведь если взять, например, в качестве матрицы переходных вероятностей единичную матрицу, то линейно независимых стационарных состояний будет столько сколько состояний у цепи.

Чтобы ответить на поставленные вопросы напомним следующий простой факт: монотонное преобразование отрезка в себя имеет неподвижную точку. Причем это утверждение можно доказать с помощью *принципа сжимающих отображений*. Марковская динамика – это монотонная динамика в том смысле, что если $\vec{x}\geq\vec{y}\geq\vec{0}$ (покомпонентно, следовательно, “$\geq$” задает лишь частичный порядок), то $\vec{x}^{T}P\geq\vec{y}^{T}P$ (это следует из того, что все элементы матрицы P неотрицательные). Поэтому возникает желание воспользоваться одним из основных инструментов прикладного функционального анализа “принципом сжимающих отображений”, чтобы исследовать на устойчивость стационарные распределения (неподвижные точки марковской динамики). Далее осуществляется этот план.

Теорема (принцип сжимающих отображений, монотонные операторы, эргодическая теорема для конечных однородных марковских цепей [2]).

а) (принцип сжимающих отображений) Если оператор (вообще говоря, нелинейный) A действует в полном метрическом пространстве X и

$$\exists\ k\in\mathbb{N}:\ \forall\ x,y\in X\to\rho\left(A^{k}(x),A^{k}(y)\right)\leq\theta\rho(x,y),\ \theta\in(0,1),\ \text{то}$$

$$\exists!\ x^{*}\in X:\ A\left(x^{*}\right)=x^{*}\ \text{и}\ \forall\ x\in X\to\rho\left(A^{n}(x),x^{*}\right)=\mathrm{O}\left(\theta^{n/k}\right).$$

б) (монотонные операторы) Пусть $X = \mathrm{P}\mathbb{R}^n_{++}$ – множество лучей пространства $\mathbb{R}^n$, лежащих во внутренности неотрицательного ортанта, на котором введена метрика Биркгофа:

$$\rho(x,y) = \ln \min\left\{\frac{\beta}{\alpha}: \quad \alpha x \le y \le \beta x\right\} = \ln \min_{i,j=1,\dots,n} \frac{x_i/x_j}{y_i/y_j}.$$

Здесь под элементами x и y в левой части равенства понимаются лучи, а вот в правой части уже какие-то векторы, лежащие на соответствующих лучах. Какие именно векторы – не важно. Тогда X – полное метрическое пространство. И если линейный оператор $A: \; X \to X$ ($A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,1}^{n,n}$ – матрица $n \times n$) положительный, т.е. $\forall \; i,j = 1,\dots,n \to a_{ij} > 0$, то $\exists \; \theta \in (0,1): \; \forall \; x,y \in X \to \rho(Ax,Ay) \le \theta\rho(x,y)$.

в) (стохастический вариант теоремы Фробениуса–Перрона, или эргодическая теорема для конечных однородных марковских цепей) Следующие условия для стохастической матрицы $n \times n$ P равносильны:

1) $\exists \; m_0 \in \mathbb{N}: \; P^{m_0} = \|p_{ij}(m_0)\|_{i,j=1}^{n,n} > 0$, т.е. $\forall \; i,j = 1,\dots,n \to p_{ij}(m_0) > 0$;

2) i) У системы

$$\vec{p}^{*T} = \vec{p}^{*T} P, \; \sum_{k=1}^{n} p_k^* = 1. \quad \text{(S)}$$

существует притом единственно решение $\vec{p}^*$.

ii) Причем $\vec{p}^* > \vec{0}$.

iii) $\forall \; \vec{p}(0) \ge \vec{0} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k(0) = 1\right) \to \lim_{m\to\infty} \vec{p}^T(m) = \lim_{m\to\infty} \vec{p}^T(0) P^m = \vec{p}^{*T}$, другими словами,

$$\lim_{m\to\infty} P^m = \Big[\underbrace{\vec{p}^*, \vec{p}^*, \dots, \vec{p}^*}_{n}\Big]^T.$$

Заметим также, что условия 1), 2) пункта в) теоремы равносильны следующим требованиям: конечная однородная марковская цепь с матрицей переходных вероятностей P – неразложимая = неприводимая (т.е. из произвольного состояния «можно прийти» в любое, наперед заданное) и непериодическая Н.О.Д.$\left\{k: \left[P^k\right]_{11} > 0\right\} = 1$.

Например, для цепи с матрицей переходных вероятностей $P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ период равняется 2. Если убрать условие непериодичности, то для неразложимой цепи с периодом d будет иметь место сходимость средних временных (*сходимость по Чезаро*):

$$\exists! \; \vec{p}^* > \vec{0} \; \left(\vec{p}^* \in \mathrm{S}\right): \; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} P^m = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} P^{m+k-1} = \Big[\underbrace{\vec{p}^*, \vec{p}^*, \dots, \vec{p}^*}_{n}\Big]^T.$$

Если перейти к непрерывному времени, осуществляя соответствующий скейлинг, то легко показать, что необходимость в условии непериодичности исчезает.

Если же цепь разложима, то система (S) , вообще говоря, уже будет разрешима не единственным образом (аналогично и в непрерывном времени). Финальное распределение существует, но уже может зависеть от того, с какого распределения стартуем. Кроме того, не обязательно будет верно условие $\vec{p}^* > \vec{0}$.

В заключение заметим, что эргодическая теорема переносится и на марковские процессы со счетным числом состояний с одним лишь нюансом: финальное распределение = стационарному распределению уже не обязательно будет распределением вероятностей. Хорошо это можно продемонстрировать на примере симметричного случайного блуждания на бесконечной прямой. Эта марковская цепь имеет единственное финальное распределение (хотя цепь и периодическая, зато неразложимая), которое совпадает с единственным стационарным распределением, в котором все вероятности равны нулю, т.е. не являющимся распределением вероятностей.

2. ПРИМЕРЫ И ОБЩАЯ СХЕМА ПОИСКА РАВНОВЕСИЯ МАКРОСИСТЕМ

Рассмотрим сначала для наглядности, пожалуй, один из самых простых примеров.

Пример (модель Эренфестов [1, 3]). Рядом стоят две собаки с номерами ***1*** и ***2***. На собаках как-то расположились $M = 2n \gg 1$ блох. Скажем, в начальный момент все блохи собрались на собаке с номером ***1***. На каждом шаге случайно и независимо от предыстории определяется блоха (с вероятность $1/M$ будет выбрана любая из блох), которая перепрыгивает на другую собаку. Микросостояние системы есть способ распределения M различных блох по двум различным собакам. Макросостояние системы есть способ распределения M одинаковых блох между двумя различными собаками. Микросостояний будет 2^M, а макросостояний $M+1$.

Обозначим через P матрицу (размера $2^M \times 2^M$) переходных вероятностей описанной выше микросокопической динамики. Для нас в дальнейшем будет важно лишь одно свойство этой стохастической матрицы: $P = P^T$, которое следует из обратимости динамики во времени. Но поскольку P – стохастическая матрица, то

$$(1,\ldots,1) = (1,\ldots,1)P^T \Rightarrow (1,\ldots,1) = (1,\ldots,1)P.$$

Откуда с учетом нормировки распределения вероятностей на 1 имеем, что в стационарном распределении все микросостояния равновероятны, т.е. в стационарном распределении каждому микросостоянию приписана вероятность 2^{-M}. Но тогда вероятность макросостояния $(k, M-k)$ в стационарном распределении равна $C_M^k 2^{-M}$. Отсюда по теореме Муавра–Лапласа и по эргодической теореме для конечных однородных марковских процессов следует, что (в конце статьи будет продемонстрирован довольно общий способ получения подобного рода соотношений)

$$\lim_{m\to\infty} P\left(\frac{|n_1(m) - n_2(m)|}{M} \le \frac{3}{\sqrt{M}}\right) \ge 0.99,$$

где $n_1(m)$ – число блох на первой собаке на шаге m, а $n_2(m)$ – на второй (случайные величины). Т.е. относительная разность числа блох на собаках будет иметь порядок малости $O\left(1/\sqrt{M}\right)$ на больших временах ($T \ge O(M)$). Обратим внимание, что марковская цепь – периодическая (период 2). Однако, поскольку речь идет о вычисление вероятностей относительных величин, то в данной задаче это не играет роли.

Обозначим

$$\tau(k) = \inf\left\{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n_1(m) = k\right\},\ \sigma(k) = \inf\left\{m \in \mathbb{N} : n_1(m) = k, n_1(0) = k\right\}.$$

Времена соответственно первого попадания и первого возвращения в состояние k. Тогда

а) $E\sigma(k) = 2^M \dfrac{k!(M-k)!}{M!}$, и, в частности, среднее время возвращения в нулевое состояние $E\sigma(0) = 2^M$, где $E\sigma(k)$ – математическое ожидание времени первого возвращения в состояние k, если $n_1(0) = k$, $k = 0,\ldots,n$;

б) $E_n\tau(0) = \dfrac{1}{M} 2^M \left(1 + o(M)\right)$, где $E_n\tau(0)$ – математическое ожидание времени первого попадания в состояние 0, если $n_1(0) = n$;

в) $E_0\tau(n) = n\ln n + n + O(1)$, где $E_0\tau(n)$ – математическое ожидание времени первого попадания в состояние n, если $n_1(0) = 0$.

На примере этой модели можно говорить о том, что в макросистемах возврат к неравновесным макросостояниям вполне допустим, но происходить это может только через очень большое время (*циклы Пуанкаре*), так что нам может не хватить отведенного времени, чтобы это заметить (*парадокс Цермело*). Напомним, что описанный выше случайный процесс обратим во времени. Однако наблюдается необратимая динамика относительной разности числа блох на собаках (*парадокс Лошмидта*). Но в таком случае можно удивляться также и тому, что газ, собранный в начальный момент в одной половине сосуда, с течением времени равномерно распределится по сосуду.

Изложим теперь общую схему (ограничимся рассмотрением непрерывного времени, случай дискретного времени содержательно не добавляет ничего нового).

Предположим, что некоторая макросистема может находиться в различных состояниях, характеризуемых вектором $\vec{n}$ с неотрицательными целочисленными компонентами. Будем считать, что в системе происходят случайные превращения (химические реакции). Пусть $\vec{n} \to \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) \in J$ – все возможные типы реакций. Введем, следуя М.А. Леонтовичу (1935), *интенсивность реакции* (случай дискретного времени рассматривается аналогичным образом):

$$\lambda_{\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)}(\vec{n}) = \lambda_{\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)}\left(\vec{n} \to \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = M^{1-\sum_i \alpha_i} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{n}) \prod_{i:\alpha_i > 0} n_i \cdot \ldots \cdot \left(n_i - \alpha_i + 1\right),$$

где $K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \ge 0$ – *константы реакции* (в химической кинетике – постоянные, а в социодинамике (В. Вайдлих [4]) – необязательно); при этом часто считают $\sum_i n_i(t) \equiv M$. Т.е. $\lambda_{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}(\vec{n})$ – вероятность осуществления в единицу времени перехода $\vec{n} \to \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. На макроуровне это соответствует принципам химической кинетики (*закон действующих масс Гульдберга–Вааге*, 1865). Таким образом, динамика макросистемы задается линейной полугруппой (однородный дискретный марковский случайный процесс), инфинитезимальный оператор которой определяется интенсивностями реакций $\lambda_{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}(\vec{n})$.

Следующее **утверждение** отображает известные результаты а) В.В. Веденяпина [5, 7], б) С.А. Пирогова и др. [6, 8] и в) обобщает результаты В. Вайдлиха и др. [4] на случай, когда рассматривается более общая схема, чем модель миграции населения:

а) $\langle \vec{\mu}, \vec{n}(t) \rangle \equiv \langle \vec{\mu}, \vec{n}(0) \rangle \iff \vec{\mu} \perp \mathrm{Lin}\{\vec{\alpha} - \vec{\beta}\}_{(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \in J}$.   (inv)

б) Пусть выполняется *условие Штюкельберга–Батищевой–Пирогова* [5 – 8]

$$\exists\ \vec{\xi} > \vec{0}:\ \forall\ \vec{\alpha} \to \sum_{\vec{\beta}:(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in J} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} = \sum_{\vec{\beta}:(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in J} K_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} \prod_j \xi_j^{\beta_j}\ \ (K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{n}) \equiv K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}). \quad \text{(ШБП)}$$

Тогда “пуассоновская” мера $\nu(\vec{n}) = \prod_i \lambda_i^{n_i} e^{-\lambda_i} / n_i!$ (точнее говоря, мера, индуцированная пуассоновской мерой на множестве (вообще говоря, конечном!), задаваемом условиями (inv)), где $\lambda_i = \xi_i^* M$, а $\vec{\xi}^*$ – произвольное решение (ШБП), будет инвариантной относительно предложенной стохастической марковской динамики. Эта мера экспоненциально быстро концентрируется, с ростом M , в окрестности *наиболее вероятного состояния* (также удовлетворяющего условию (ШБП)), которое и принимается за *положение равновесия макросистемы*. Задача поиска наиболее вероятного макросостояния асимптотически эквивалентна *задаче максимизации энтропийного функционала* (воспользовались $n! = \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\,(1 + o(1))$ – *формулой Стирлинга*):

$$E \approx -\sum_i n_i \cdot \left(\ln(n_i/\lambda_i) - 1\right)$$

на множестве, задаваемом условием (inv). Отметим, что условие (ШБП), называемое также *условием унитарности* [8], обобщает хорошо известное в физике и экономике *условие детального равновесия* [1, 4]:

$$\exists\ \vec{\xi} > \vec{0}:\ \forall\ (\vec{\alpha},\vec{\beta}) \in J \to K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} = K_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} \prod_j \xi_j^{\beta_j}.$$

в) Пусть $\forall\ (\vec{\alpha},\vec{\beta}) \in J \to \sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i;\ \alpha_i, \beta_i \in \{0,1\}$, $\mathrm{K}_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} = \mathrm{K}_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$,

$$K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{n}) = \mathrm{K}_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \exp\left(\sum\nolimits_{i:\,\beta_i=1} u_i(n_i+1) - \sum\nolimits_{i:\,\alpha_i=1} u_i(n_i)\right),\ u_i'(n_i) \le 0.$$

Тогда мера $\nu(\vec{n}) = \exp\left(\sum_i U_i(n_i)\right) \cdot \prod_i (n_i!)^{-1}$, где $U_i(n_i) = 2\sum_{\nu=1}^{n_i} u_i(\nu)$ будет инвариантной относительно предложенной стохастической марковской динамики. Эта мера экспоненциально быстро концентрируется, с ростом $M \equiv \sum_i n_i(t)$, в окрестности наиболее вероятного состояния, которое и принимается за положение равновесия макросистемы. Задача поиска наиболее вероятного макросостояния асимптотически эквивалентна задаче максимизации энтропийного типа функционала:

$$E \approx \sum_i \left\{-n_i \ln(n_i) + U_i(n_i)\right\}$$

на множестве, задаваемом условием (inv).

В пунктах б) и в) предполагалось, что марковский процесс неразложим (неприводим) в классе (inv): из любого состояния можно со временем прийти в любое другое (по-прежнему оставаясь на множестве (inv)). Отсюда следует единственность инвариантной меры. Это условие не выполняется, например, для хорошо известной модели "хищник–жертва" (кролики–трава) [7], в которой имеется поглощающее состояние: без хищников. Нам еще будет встречаться ниже, и не один раз, эта модель.

Контрпример (С.А. Пирогов). Условие (ШБП) является только достаточным условием инвариантности "пуассоновской" меры. Действительно, рассмотрим систему уравнений химических реакций (константы реакций K одинаковы и постоянны):

$$A + B^* \xrightarrow{K} A^* + B;\ B + C^* \xrightarrow{K} B^* + C;\ C + A^* \xrightarrow{K} C^* + A, \text{ причем}$$
$$n_A(t) + n_{A*}(t) \equiv n_B(t) + n_{B*}(t) \equiv n_C(t) + n_{C*}(t) \equiv N.$$

Заметим, что есть и еще один независимый закон сохранения:

$$n_A(t) + n_B(t) + n_C(t) \equiv \text{const}.$$

Можно проверить, что "пуассоновская" мера ("$\sim$" – знак пропорциональности)

$$\nu(\vec{n}) \sim C_N^{n_A} \cdot C_N^{n_B} \cdot C_N^{n_C} \sim \left(1^{n_A} e^{-1} / n_A!\right) \cdot \ldots \cdot \left(1^{n_{C^*}} e^{-1} / n_{C^*}!\right)$$

будет инвариантной, хотя условие (ШБП), очевидным образом, не выполняется.

В связи с этим контрпримером заметим, что понятие равновесия макросистемы "не завязано" на условие (ШБП). Так в контрпримере С.А. Пирогова равновесие будет существовать: $n_A(\infty) \approx n_{A*}(\infty) \approx n_B(\infty) \approx n_{B*}(\infty) \approx n_C(\infty) \approx n_{C*}(\infty) \approx N/2$.

Пример (Вильфредо Парето, "Кинетика социального неравенства"). В городе живет $M \gg 1$ (например, 10 000) пронумерованных жителей. У каждого i-го жителя есть в начальный (нулевой) момент времени целое (неотрицательное) количество рублей $s_i(0)$ (монетками, достоинством в один рубль). Со временем пронумерованные жители (количество которых не изменяется, так же как и суммарное количество рублей) случайно разыгрывают свое имущество. Пусть в момент времени $t \geq 0$ r-й житель имеет k рублей, а l-й житель – m рублей. Тогда $p_{k;m}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ есть вероятность того, что жители с номерами r и l ($1 \leq r < l \leq M$) встретятся и попробуют разыграть один рубль по следующему правилу: с вероятностью $1/2$ житель с большим номером отдаёт 1 рубль (если, конечно, он не банкрот) жителю с меньшим номером и с вероятностью $1/2$ наоборот. Будем считать, что $p_{k;m}(t) \equiv \kappa M^{-1}$ ($\kappa > 0$). Пусть $c_s(t)$ – доля жителей города, имеющих ровно s рублей в момент времени t (заметим, что $c_s(t)$ – случайная величина). Пусть $S = \sum_{i=1}^{M} s_i(0)$, $\bar{s} = S/M$. Тогда:

$$\forall\ q = 0, ..., S\ \exists\ \lambda_q > 0,\ T_q = \mathrm{O}(M):\ \ \forall\, t \geq T_q \to P\left(\left|\frac{c_s(t)}{Ce^{-s/\bar{s}}} - 1\right| \leq \frac{\lambda_q}{\sqrt{M}},\, s = 0, ..., q\right) \geq 0.999,$$

где C определяется из условия нормировки: $\sum_{s=0}^{S} Ce^{-s/\bar{s}} = 1$, т.е. $C \approx \bar{s}^{-1}$.

Скорость сходимости оценивается сверху, исходя из оценок в доказательстве эргодической теоремы для однородных марковских цепей с конечным числом состояний. Как показывают численные эксперименты, оценка $\mathrm{O}(M)$ точная. Так, если в городе 10 000 жителей и единица времени – день, то при начальном «социальном равенстве» с вероятностью, близкой к единице, через 20–30 лет (при $\kappa = 1$) установится «социальное неравенство». Оказывается (см. также модель Эренфестов), что оценка скорости сходимости $\mathrm{O}(\mathrm{poly}(M))$ характерна для большинства макросистем в схеме М.А. Леонтовича (это устанавливается с помощью оценки Добрушина и подсчета кривизны Риччи (неравенств типа Пуанкаре–Чигера) [9]). Отмеченное выше обстоятельство хорошо известно специалистам по имитационному моделированию, как Markov chain Monte Carlo revolution [10].

Заметим, что описанный выше случайный процесс также (как и в модели Эренфестов) обратим во времени. Однако наблюдается необратимая динамика $c_s(t)$ (парадокс Лошмидта).

Этот пример демонстрирует ситуацию, когда число состояний ($\dim \vec{n}$) и число реакций ($|J|$) растут вместе с ростом M. Это обстоятельство, равно как и зависимость $K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{n})$, не позволяют напрямую использовать аппарат, разработанный в [4 – 8], связанный с анализом СОДУ, возникающей при каноническом скейлинге ($M \to \infty$ так, что $\exists\ \lim_{M\to\infty} \vec{n}(0)/M = \vec{c} > \vec{0}$) стохастической марковской динамики. Тем не менее, результаты настоящего примера можно перенести и на общий случай. При этом ключевым местом является существование при термодинамическом предельном переходе $M \to \infty$, $|J| \to \infty$ ненулевого финального распределения (см. конец предыдущего пункта и отмеченную там опасность нулевого финального распределения) [11].

Предположим теперь, что множество J не зависит от M, и в начальный момент времени для любого i существует предел $c_i(0) = \lim_{M\to\infty} n_i(0)/M$, $K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{n}) := K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{n}/M)$. Тогда (Малышев–Пирогов–Рыбко [6]) в произвольный момент времени $t > 0$ и для любого i существует предел по вероятности (заметим, что $n_i(t)$ – случайные величины, тем не менее $c_i(t)$ – уже не случайные величины) $c_i(t) \overset{\text{п.н.}}{=} \lim\limits_{M\to\infty} n_i(t)/M$. Описанный выше приём называется *каноническим скейлингом*. В результате такого скейлинга приходим к «динамике квазисредних» (терминология В. Вайдлиха [4]):

$$\frac{dc_i}{dt} = \sum_{(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in J} (\beta_i - \alpha_i) K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{c}) \prod_j c_j^{\alpha_j}. \qquad \text{(ДК)}$$

Эти же уравнения можно получить и по-другому. А именно, как приближенную динамику средних $\bar{c}_i(t) = E\left[n_i(t)/M\right]$. Приближенную в том смысле, что при выводе (ДК) используется приближение: $F(\bar{c}_i(t)) \approx E\left[F(n_i(t)/M)\right]$ для «достаточно хороших» функций F (например, полиномов). Это верно в случае пикообразного распределения $n_i(t)$.[1]

Покажем, во многом следуя Батищевой–Веденяпину [5], что в если выполняются условия (ШБП), то траектория (ДК) сходится к неподвижной точке (какой именно, зависит, вообще говоря, от «точки старта»; но можно сказать и точнее: к той единственной неподвижной точке из семейства неподвижных точек, которая принадлежит аффинному многообразию (inv), инвариантному относительно (ДК)).[2] Для этого, следуя второму методу Ляпунова, введём (минус) *энтропию*: $H = \sum_i c_i \cdot \left(\ln(c_i/\xi_i) - 1\right)$ и покажем, что она является функцией Ляпунова для системы (ДК). Посчитаем полную производную H в силу системы (ДК):

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in J} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} y_j^{\alpha_j} \cdot \left(\ln \prod_i y_i^{\beta_i - \alpha_i} - \sum_i (\beta_i - \alpha_i)\right) +$$

$$+ \sum_{(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in J} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} y_j^{\alpha_j} \cdot \sum_i (\beta_i - \alpha_i) = \sum_{(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in J} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} y_j^{\alpha_j} \cdot \ln \prod_i y_i^{\beta_i - \alpha_i},$$

где введено обозначение $y_i = c_i/\xi_i$. Заметим, что

$$\sum_{(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in J} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} y_j^{\alpha_j} = \sum_{(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in J} K_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} \prod_j \xi_j^{\beta_j} y_j^{\alpha_j} = \sum_{(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in J} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} y_j^{\beta_j}.$$

Таким образом,

$$\frac{dH}{dt} = -\sum_{(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in J} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} y_j^{\beta_j} \cdot \left(\prod_j y_j^{\alpha_j - \beta_j} \cdot \ln \prod_i y_i^{\alpha_i - \beta_i} - \prod_j y_j^{\alpha_j - \beta_j} + 1\right) \le 0,$$

поскольку $u \ln u - u + 1 \ge 0$ при $u > 0$, и равенство достигается в одной точке $u = 1$.

---

[1] Заметим, что этот переход и возможность его использования нуждаются в строгом обосновании (и далеко не всегда правомочны). В качестве примера, укажем популярный в литературе [12, 13] марковский процесс "рождения–гибели" (приводящий к системе уравнений "хищник–жертва"), для которого «флуктуации играют решающую роль, качественно меняя выводы макроскопического анализа».

[2] Стоит заметить, что аттрактор системы (ДК) даже с постоянными коэффициентами реакции, по-видимому, в общем случае может быть сколь угодно сложным множеством [4].

Естественно (в виду примера С.А. Пирогова) теперь задаться вопросом: А что будет, если условия (ШБП) не выполняются, однако система (ДК) имеет на внутренности пересечения неотрицательного ортанта и инвариантного аффинного многообразия (inv) единственную неподвижную точку? Оказывается, имеет место **утверждение**: если эта точка экспоненциально глобально устойчива, то 1) все законы сохранения (ДК) определяются (inv); 2) около положения равновесия инвариантная мера будет экспоненциально быстро концентрироваться (с ростом M); 3) скорость сходимости к равновесию (mixing time [14]) оценивается как $\mathrm{O}\left(\mathrm{poly}\left(M\right)\right)$; 4) элементы корреляционной матрицы случайного вектора $\vec{n}\left(t\right)$ равномерно ограничены по времени; 5) предельные переходы $\lim\limits_{M\to\infty}$ и $\lim\limits_{t\to\infty}$ перестановочны: $\lim\limits_{M\to\infty}\lim\limits_{t\to\infty}* = \lim\limits_{t\to\infty}\lim\limits_{M\to\infty}*$.

Обратим внимание, что модель “хищник–жертва”, в изложении п. 7.3 книги [13] является хорошим примером того, что может быть, если не выполняется условие устойчивости равновесия.

Результаты [4, 12] и ряда других работ наталкивают на **гипотезу**: аттрактор динамической системы (ДК), который как мы отмечали выше может быть сколь угодно сложным множеством (например, в приложениях типичны случаи предельных циклов, нескольких положений равновесий, и даже хаотических аттракторов), является таким множеством, в малой окрестности которого на больших временах с большой вероятностью будет пребывать рассматриваемая макросистема.

Настоящее выступление представляет собой пополненную новыми результатами версию приложения Е.В. Гасниковой в книге [15].

Литература

1. *Кельберт М. Я., Сухов Ю. М.* Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2. М.: МЦНМО, 2010.
2. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. Метод положительных операторов. М.: Наука, 1985.
3. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.
4. *Вайдлих В.* Социодинамика: системный подход к математическому моделированию в социальных науках. М.: УРСС, 2010.
5. *Веденяпин В.В.* Кинетическая уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
6. *Malyshev V.A., Pirogov S.A., Rubco A.N.* Random walks and chemical networks // Mosc. Math. J. 2004. V. 4. № 2. P. 441–453.
7. *Батищева Я.Г., Веденяпин В.В.* II-й закон термодинамики для химической кинетики // Мат. мод. 2005. Т. 17. № 8. С. 106–110.
8. *Малышев В. А., Пирогов С. А.* Обратимость и необратимость в стохастической химической кинетике // УМН. 2008. Т. 63. № 1. С. 3–36.
9. *Ollivier Y.* A survey on Ricci curvature for metric spaces and Markov chains. 2010. http://www.yann-ollivier.org/rech/publs/surveycurvmarkov.pdf
10. *Diaconis P.* The Markov chain Monte Carlo revolution // Bulletin (New Series) of the AMS. 2009. V. 49. № 2. P. 179-205.
11. *Rybko A., Shlosman S.* Poisson hypothesis for information networks I, II // e-prints, 2004. http://arxiv.org/abs/math/0406110v1; http://arxiv.org/abs/math-ph/0410053v1
12. *Гардинер К. В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
13. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика: время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир, 1999.
14. *Montenegro R., Tetali P.* Mathematical aspects of mixing times in Markov chains. 2006. http://people.math.gatech.edu/~tetali/PUBLIS/survey.pdf
15. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б; Приложения: Бланк М.Л., Гасникова Е.В., Замятин А.А. и Малышев В.А., Колесников А.В., Райгородский А.М; Под ред. А.В. Гасникова – М.: МФТИ, 2010. – 361 с. http://zoneos.com/traffic/, http://crec.mipt.ru/study/courses/optional/gasnikov/