© 2008 г. В. И. Швецов, канд. физ.-мат. наук
(Институт системного анализа РАН, Москва)

АЛГОРИТМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Обсуждаются модели и алгоритмы распределения транспортных потоков в сети крупного города или агломерации. Проведен сравнительный анализ разных алгоритмов поиска равновесного распределения в транспортной сети. Обсуждается проблема неоднозначности распределения корреспонденций по путям в условиях равновесия и использование энтропийных моделей для устранения этой неоднозначности.
PACS: 89.40.-a

1. Введение

Транспортная инфраструктура — одна из важнейших инфраструктур, обеспечивающих жизнь городов и регионов. В последние десятилетия во многих крупных городах исчерпаны или близки к исчерпанию возможности экстенсивного развития транспортных сетей. Поэтому особую важность приобретает оптимальное планирование сетей, улучшение организации движения, оптимизация системы маршрутов общественного транспорта. Решение таких задач невозможно без математического моделирования транспортных сетей. Главная задача математических моделей — определение и прогноз всех параметров функционирования транспортной сети, таких как интенсивность движения на всех элементах сети, объемы перевозок в сети общественного транспорта, средние скорости движения, задержки и потери времени и т.д.

Общая схема моделирования работы транспортной системы включает в себя следующие взаимосвязанные задачи [1]:

- расчет общих объемов передвижений между всеми районами города или агломерации (расчет матриц межрайонных корреспонденций);
- распределение корреспонденций по конкретным путям в транспортной сети;
- расчет загрузки всех элементов сети транспортными потоками.

В настоящей работе будет обсуждаться вторая задача из приведенного списка, т.е. задача распределения известных межрайонных корреспонденций по путям в сети. Если такое распределение известно, то загрузка всех элементов сети может быть получена простым суммированием корреспонденций, использующих эти элементы для движения.

Основой для моделирования процесса распределения корреспонденций является принцип равновесия в транспортной сети [2, 3], обсуждаемый в разделе 2. Разделы 3-4 посвящены сравнительному анализу различных алгоритмов поиска равновесия. Принцип равновесия однозначно определяет значения потоков на дугах сети, однако оставляет большой произвол в выборе распределения корреспонденций по путям.

Использование принципа максимизации энтропии для устранения этой неопределенности обсуждается в разделе 5.

Транспортная сеть в модели представлена графом, состоящим из узлов и дуг, причем специальным типом узлов являются также районы прибытия и отправления, на которые подразделяется вся территория города. В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения: индекс a нумерует дуги графа; u_a — транспортный поток на дуге a; p, q — номера районов прибытия и отправления; K_{pq} — множество путей по графу из p в q; индекс k нумерует пути в K_{pq}; u_{kpq} — часть корреспонденции из p в q, использующая путь k (будем также называть ее «потоком на пути k»).

2. Принцип равновесия

В основе алгоритмов распределения транспортных потоков по путям в сети лежит предположение о том, что каждый участник движения стремится минимизировать обобщенную цену своего пути. Обобщенная цена пути представляет собой агрегированный критерий оценки пути. Основной составляющей обобщенной цены является время, затраченное на передвижение, однако в этот критерий могут включаться и другие составляющие, например, цена пути в обычном смысле, как денежные затраты. В дальнейшем будем для краткости называть обобщенную цену просто ценой пути. Цена пути представляет собой сумму цен движения по дугам, из которых состоит путь, а также цен переходов с дуги на дугу (маневров на пересечениях). В дальнейшем для сокращения формул будем опускать цены маневров и говорить только о ценах дуг, которые будем обозначать через c_a, где a — номер дуги.

Равновесным называется распределение потоков, при котором ни один из участников движения не может изменить свой путь так, чтобы уменьшить цену пути. Согласно современным представлениям распределение потоков в транспортной сети в установившейся ситуации является равновесным в указанном смысле. Сформулированное условие известно как условие Вардрупа (или условия Вардрупа, поскольку оно часто формулируется в виде двух предложений [2]).

Ключевым предположением о цене является следующее: цена движения по дуге является неубывающей функцией суммарного потока по этой дуге: $c_a = c_a(u_a)$. Другими словами, чем больше автомобилей движется по дуге, тем более медленным и дискомфортным становится движение и, соответственно, возрастает цена пути. При данном предположении можно показать, что в любой транспортной системе существует равновесное состояние. Это состояние является единственным в том смысле, что условие равновесия однозначно определяет потоки на всех дугах сети. Другими словами, существует единственная загрузка элементов сети, удовлетворяющая условию равновесия. Однако равновесное распределение не является единственным в терминах распределения корреспонденций по путям в сети. Т.е. разные распределения корреспонденций по путям могут порождать одинаковую загрузку всех элементов сети (на самом деле, для данной загрузки существует бесконечное количество порождающих ее распределений).

Равновесное распределение дается решением следующей задачи оптимизации с ограничениями [3]:

$$\sum_a \int_0^{u_a} c_a(v)\, dv \to \min . \tag{1}$$

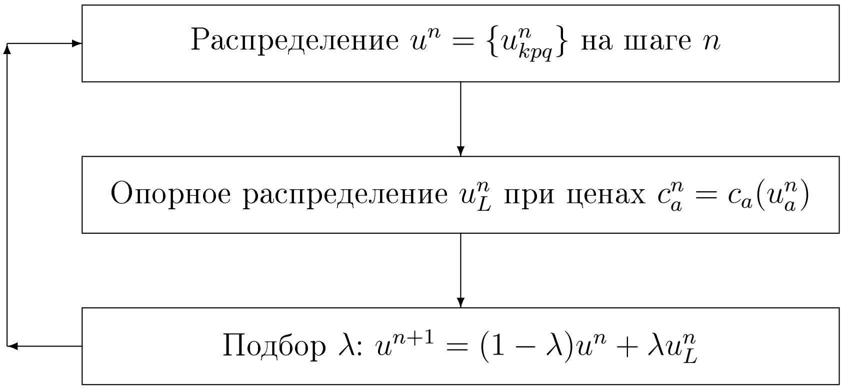

Рис. 1. Алгоритм Франке-Вульфа.

Потоки на дугах u_a, входящие в это выражение, не являются независимыми переменными задачи. Они представляют собой суммы потоков u_{kpq} по всем путям k, использующим данную дугу a. Ограничения в задаче состоят в том, что потоки по путям u_{kpq} должны в сумме давать корреспонденции F_{pq} между всеми парами районов p и q:

$$
\begin{aligned}
& u_a = \sum_{p,q} \sum_{k \in K_{pq}, a \in k} u_{kpq}, \\
& F_{pq} = \sum_{k \in K_{pq}} u_{kpq}, \qquad (2) \\
& u_{kpq} \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

3. Алгоритм Франке-Вульфа

Хотя принцип равновесия в транспортной сети был впервые сформулирован еще в 50-е г., практическое применение этого принципа началось значительно позже, в середине 70-х г. [4]. Это связано с тем, что численная реализация модели требует значительного объема памяти компьютера. Для хранения всей информации о распределении корреспонденций по путям в крупном городе требуется значительный объем (до нескольких гигабайт) памяти. Компьютеры с такими возможностями стали широко распространены только в последнее время. Однако возможность моделировать равновесное распределение появилась значительно ранее, благодаря разработке алгоритма Франке-Вульфа [5]. Особенностью этого алгоритма является то, что он дает возможность вычислить итоговую равновесную загрузку транспортной сети, не сохраняя в памяти компьютера само распределение корреспонденций по путям.

Схема работы алгоритма Франке-Вульфа показана на рис. 1. На начальном шаге все корреспонденции распределяются на оптимальные (по цене) пути, рассчитанные по свободной сети. На каждом последующем шаге алгоритма $n+1$ каждая корреспонденция уже распределена на некоторое количество путей (не более n), вычисленных на предыдущих n шагах. В результате возникает загрузка дуг сети u^n_a. С учетом этой загрузки рассчитываются цены дуг c^n_a, и строится новая система оптимальных путей. Данная система путей является «опорной» для перераспределения корреспонденций. При этом для некоторых корреспонденций рассчитанные пути могут оказаться действительно новыми, в то время как для других корреспонденций рассчитанный оп-

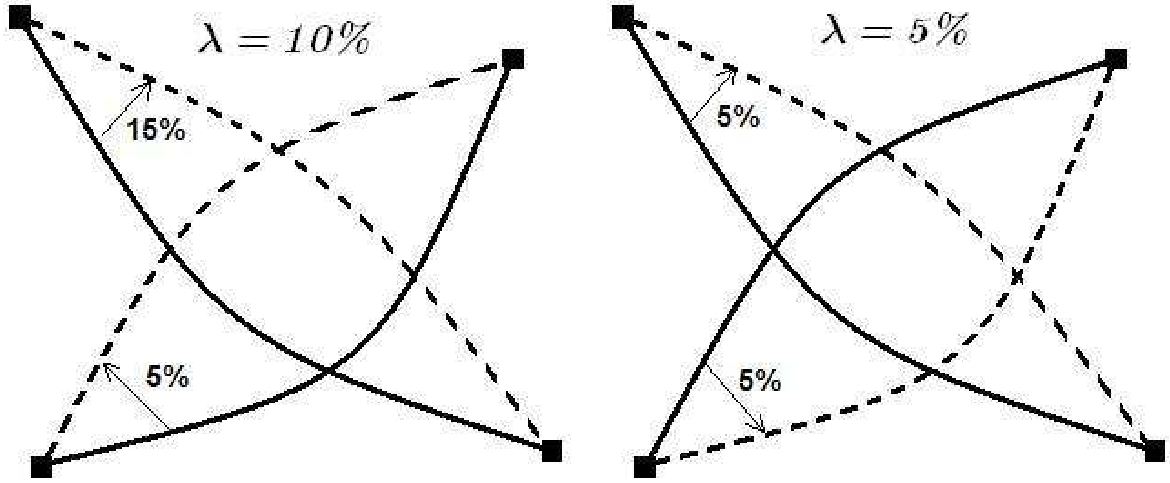

Рис. 2. Принцип работы алгоритма Франке-Вульфа.

тимальный путь уже содержится среди путей, полученных на предыдущих шагах. Далее вычисляется доля корреспонденций λ, которая будет перераспределена со всех прежних путей на новые оптимальные пути (способ вычисления λ для последующего анализа несущественен).

Особенностью алгоритма является то, что со всех прежних путей перераспределяется одна и та же доля корреспонденций λ. Это означает, что загрузка всех дуг уменьшится ровно в $(1-\lambda)$ раз. Отсюда следует, что для вычисления новой загрузки всех дуг нет необходимости запоминать распределение по путям, а достаточно сохранять в памяти компьютера только загрузку всех дуг от предыдущего шага. С учетом того, что цены дуг зависят только от загрузки дуг $c_a = c_a(u_a)$, для вычисления самой доли λ также не требуется знать распределение по путям.

Принцип работы алгоритма продемонстрирован на простом примере на рис. 2, где достигается равновесное распределение двух корреспонденций между двумя парами районов. Пусть на очередном шаге необходимо перераспределить с одного пути на другой 15% первой корреспонденции и только 5% второй. Тогда алгоритм выберет некоторую общую долю перераспределяемых корреспонденций, скажем 10%. В результате окажется, что для первой корреспонденции перераспределение было недостаточным, а для второй — перераспределили лишнее. С учетом новой загрузки дуг на следующем шаге алгоритма оптимальным для первой корреспонденции будет тот же путь, что и на предыдущем шаге, а для второй корреспонденции оптимальным, наоборот, станет путь, с которого на предыдущем шаге сняли корреспонденцию. Таким образом, на этом шаге будут перераспределены оставшиеся 5% первой корреспонденции и возвращены «на место» 5% второй корреспонденции. Разумеется, приведенные цифры приблизительны. На самом деле, за счет нелинейности функции $c_a(u_a)$ значение λ на первом шаге будет отличаться от 10% и даже в описанном простом случае итерации не сойдутся точно за два шага.

Описанное достоинство алгоритма Франке-Вульфа объясняет его «долгожительство». Этот алгоритм до сих пор является наиболее распространенным в практике моделирования загрузки автомобильных сетей. Однако алгоритм обладает существенным недостатком. Хотя теоретически алгоритм всегда сходится, на практике скорость сходимости существенно ухудшается в ходе итераций. В течение первых итераций наблюдается достаточно быстрое приближение к равновесию, однако после нескольких десятков итераций приближение может практически прекратиться. Особенно сильно этот эффект проявляется на больших сетях. Ухудшение сходимости тесно связано с так называемым эффектом «застревающих потоков» (residual flows). Эффект проявляется в сильной неравномерности сходимости потоков к равновесным значениям на отдельных дугах. Т.е. при общей хорошей сходимости к равновесию в сети может сохраняться небольшое количество дуг, на которых поток сильно отличается от равновесного, причем эти «выбросы» не устраняются последующими итерациями.

Причину эффекта «застревающих потоков» можно понять исходя из принципа работы алгоритма, показанного на рис. 2. В итоге работы алгоритма каждая корреспонденция должна быть распределена по набору альтернативных путей в таких пропорциях, чтобы цены всех путей в наборе в точности уравнялись. Если минимальная и максимальная цены путей в наборе мало отличаются, то для приближения к равновесию значение λ нужно выбирать малым. Большее значение λ только отдалит распределение данной корреспонденции от равновесия. Предположим, что на ранних стадиях алгоритма в силу случайных причин небольшое количество корреспонденций «отстало» от основной массы корреспонденций по сходимости к равновесию. Для этих корреспонденций требуется перераспределить существенно бо̀льшую долю λ. Поскольку значение λ выбирается как среднее (в некотором смысле) для всех корреспонденций, оно будет выбрано малым. В результате основная часть корреспонденций еще более приблизится к равновесию, в то время как «отставание» небольшой их части сохранится. При последующих итерациях значение λ, диктуемое основной частью корреспонденций, будет становиться все меньше и меньше, так что отдельные «застрявшие» корреспонденции так и останутся неперераспределенными.

В практике моделирования транспортной сети Московской агломерации автор столкнулся с проявлениями эффекта «застрявших потоков» при увеличении числа дуг транспортного графа до 30-50 тысяч при числе районов прибытия-отправления порядка 1500. Об аналогичных проблемах сообщается в зарубежной научной печати [6, 7].

4. Другие алгоритмы поиска равновесного распределения

В последние годы были разработаны новые алгоритмы поиска равновесного распределения, свободные от указанных выше недостатков алгоритма Франке-Вульфа [8, 9, 10]. Основная идея состоит в индивидуальной работе с корреспонденциями, что позволяет своевременно перераспределять отдельные «застрявшие потоки». Разумеется, перераспределение одной корреспонденции среди альтернативных путей изменяет цены дуг и косвенно влияет на распределение других корреспонденций, использующих те же дуги. Отсюда возникает необходимость в многократном проходе всего массива корреспонденций для приведения системы в равновесное состояние.

На рис. 3 показана схема простого алгоритма такого типа, использованного для моделирования Московской агломерации. Алгоритм может быть назван «балансировкой по путям». Основная идея алгоритма состоит в следующем. В равновесном состоянии каждая корреспонденция распределена среди некоторого количества альтернативных путей, причем это количество может быть разным для разных корреспонденций и заранее не известно. Если фиксировать некоторые наборы путей между всеми парами районов, то можно сформулировать задачу поиска равновесия «в узком смысле»: найти равновесие в системе при дополнительном условии, что для передвижения используются только пути из фиксированных наборов и никакие другие. Очевидно, что если в эти наборы включены все пути, используемые при настоящем равновесном распределении, то равновесие «в узком смысле» совпадает с равновесием в обычном смысле.

Будем называть фиксированный набор путей между парой районов «пучком» путей. На первом шаге алгоритма можно сформировать пучки, состоящие всего из одного пути — оптимального пути между соответствующей парой районов, рассчитанного по пустой сети. На каждом шаге алгоритма пучки пополняются новыми путями следующим образом. Сначала решается задача равновесия «в узком смысле» для имеющихся пучков (на первом шаге эта задача тривиальна). После этого каждый пучок пополняется оптимальным путем, рассчитанным при сложившейся загрузке дуг сети. Разумеется, в качестве «нового» может выступать один из ранее полученных путей. Фактически алгоритм закончит свою работу, когда ни один по-настоящему новый путь не будет найден.

Равновесие «в узком смысле» находится так. Обозначим через K_{pq} пучок путей из района p в район q. В условиях равновесия цены используемых путей в пучке равны между собой, а цены не используемых путей выше. Если это условие выполнено, назовем пучок сбалансированным. Зафиксируем распределение всех остальных корреспонденций и будем варьировать только распределение корреспонденции f_{pq} между путями пучка K_{pq} . Определим самый короткий и самый длинный (в смысле цены) пути в пучке $k_{\min}$ и $k_{\max}$. Если начать переносить часть корреспонденции с $k_{\max}$ на $k_{\min}$, то их цены с учетом изменения загрузки будут сближаться. При этом возможны два варианта: либо можно подобрать соотношение долей, при котором цены станут равными, либо вся доля корреспонденции с $k_{\max}$ перейдет на $k_{\min}$ и длинный путь не будет использоваться. Повторяя вычисление $k_{\min}$, $k_{\max}$ в итеративном режиме, можно сбалансировать пучок K_{pq} с любой степенью точности.

Проходя в цикле все пары районов, можно сбалансировать все пучки. Однако в силу того, что пути из разных пучков могут использовать одни и те же дуги, балансировка очередного пучка в цикле будет «портить» балансировку уже пройденных пучков. Это делает необходимым многократный проход цикла по всем парам районов («большие» итерации на рис. 3).

Отметим, что описанный алгоритм находит равновесное состояние за конечное число шагов, хотя оно, разумеется, не будет точным, поскольку балансировка пучков на каждом шаге ведется до достижения некоторой конечной точности.

Согласно установившейся в последние годы терминологии алгоритмы поиска равновесия в транспортной сети можно разделить на «дуговые» (link-based), т.е. основанные на работе с потоками по дугам, и «маршрутные» (route-based), работающие с потоками по всем путям (или маршрутам) в сети. Типичным примером дугового алгоритма является алгоритм Франке-Вульфа, маршрутного типа — изложенный выше алгоритм балансировки по путям. Основным преимуществом маршрутных алгоритмов является существенное повышение равномерности сходимости потоков на дугах, в частности, решение проблемы «застревающих потоков». Однако это достигается за счет кардинального увеличения необходимого объема компьютерной памяти.

Формирование начальных пучков путей

Поиск равновесия «в узком смысле»

«Большие» итерации

Цикл по всем парам районов p, q

Выравнивание цен пучка путей K_{pq}

$$k_{max}, k_{min} \in K_{pq}, \quad u_{k_{max}pq} \rightarrow u_{k_{min}pq}$$

Конец «больших» итераций: все пучки сбалансированы

Добавление новых оптимальных путей в пучки

Конец алгоритма: новых путей не добавлено

Рис. 3. Алгоритм балансировки по путям.

Речь идет даже не о физической емкости оперативной памяти. При попытке моделирования очень больших сетей сталкиваются с принципиальными ограничениями на размер виртуального адресного пространства программы в 32-битной операционной системе, т.е. может потребоваться переход к 64-битной системе.

В этих условиях заслуживает внимания промежуточный подход, предложенный Bar-Gera [10]. Этот подход представляет собой нечто среднее между дуговым и маршрутным подходами. Основной идеей является различение на каждой дуге представителей корреспонденций, двигающихся из общего района отправления, без различения районов прибытия. Таким образом, вместо потоков на дугах u_a или путях u_{kpq} в качестве независимых переменных используются потоки из «общего источника» (origin-based) u_{ap}, где a — номер дуги, p — номер района отправления. Очевидно, этот массив существенно (в количество раз порядка числа районов) меньше массива потоков по путям и может помещаться в оперативную память. Вместе с тем он позволяет достаточно индивидуально работать с корреспонденциями от разных районов. Как показали численные эксперименты, алгоритм обеспечивает требуемую равномерность сходимости и решает проблему «застрявших потоков».

5. Неединственность равновесного распределения и энтропия

Как уже было сказано в разделе 2, условие Вардрупа однозначно определяет значения суммарных потоков на всех дугах сети u_a. Это следует из вида целевой функции (1). Действительно, если цены дуг $c_a(u_a)$ являются возрастающими функциями потоков, то интегралы в (1) — выпуклые функции от u_a, поэтому равновесное распределение существует и единственно как точка минимума выпуклой функции при линейных ограничениях. Однако равновесное распределение не является единственным в терминах распределения корреспонденций по путям в сети. Причина этой неединственности наглядно показана на простом примере на рис. 4.

Пусть два района A и B соединены двумя парами идентичных путей с точкой пересечения посередине, как показано на рис. 4. Распределяется единственная корреспонденция из района A в район B. Ясно, что в условиях равновесия загрузки всех

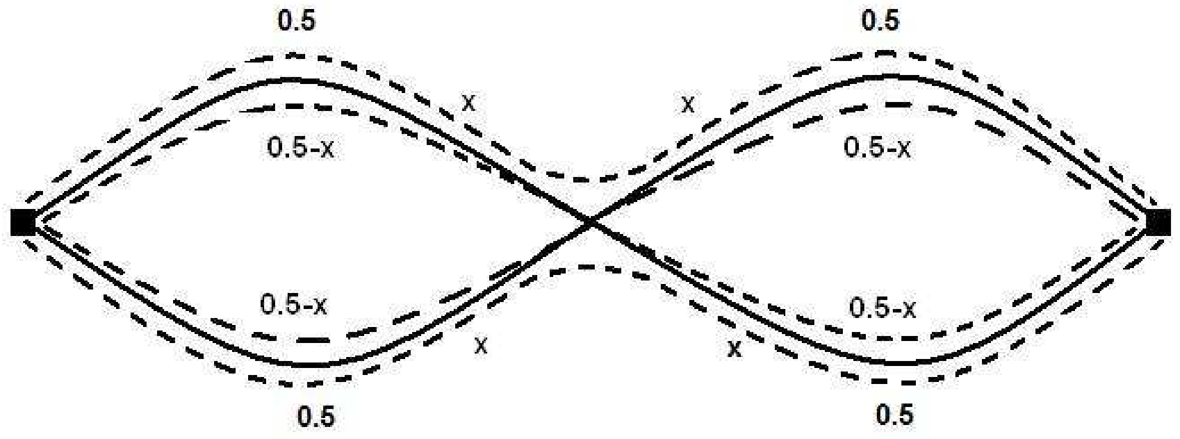

Рис. 4. Неединственность равновесного распределения.

показанных дорог должны быть равны, т.е. в обеих точках развилки корреспонденция должна делиться пополам. Существует ровно 4 разных пути из A в B. При этом существует бесконечное число способов распределения корреспонденции по этим путям, при которых корреспонденция на обеих развилках делится пополам. А именно, пусть x — это доля водителей, избравших на обеих развилках левый путь. Как показано на рисунке, при любом значении $0 \leqslant x \leqslant 0.5$ мы получаем распределение по четырем путям, порождающее равновесную загрузку. Различие этих распределений состоит только в том, сколько водителей из числа выбравших левый путь на первой развилке примет такое же решение на второй развилке.

В реальной сети с большим количеством районов ситуация более запутанная, однако природа неоднозначности распределения по путям остается такой же, как в этом примере. В сети присутствует большое количество подобных развилок, при этом с точки зрения принципа равновесия важны только общие объемы потоков по дугам. При соблюдении нужных общих объемов совершенно не важно, из каких именно водителей составляются эти потоки.

Таким образом, приходим к заключению, что условие Вардрупа не определяет однозначно распределение корреспонденций по путям. На самом деле, каждому возможному набору значений потоков по дугам u_a соответствует многомерное линейное пространство распределений по путям u_{kpq}. Следовательно, для корректной постановки задачи поиска равновесного распределения требуется сформулировать какие-то предположения, дополнительные к условию Вардрупа.

Представляется естественным вероятностный подход к решению вопроса. Рассмотрим какую-либо пару районов p, q, соединенных пучком путей K_{pq}. Можно предположить, что водители (представители корреспонденции f_{pq}) выбирают один из путей $k \in K_{pq}$ случайно и независимо друг от друга. Если задать значения вероятности выбора того или иного пути, то несложно вычислить вероятность реализации того или иного распределения корреспонденции f_{pq} по путям. В частности, в условиях равновесия цены всех используемых путей равны, и поэтому можно принять, что каждый водитель выбирает любой из используемых путей с одинаковой вероятностью.

В терминах макросистемного подхода [11] эту ситуацию можно описать так. Водители являются элементами макросистемы, при этом выбор того или иного пути определяет состояние элемента. Микросостояние системы определяется совокупностью состояний элементов, т.е. указанием пути для каждого водителя индивидуально. Макросостояние определяется «числами заполнения», т.е. общим количеством элементов в том или ином состоянии. В нашем случае числа заполнения — это потоки на путях u_{kpq}. Таким образом, разные распределения корреспонденций по путям соответствуют разным макросостояниям системы. Каждое макросостояние может быть реализовано различным количеством микросостояний, что определяет его «статистический вес». В нашем случае, когда число элементов и число состояний конечны, статистические веса макросостояний просто пропорциональны вероятностям их реализации.

Если сеть находится в равновесии и известен набор равновесных значений потоков на дугах u_a^*, то это накладывает линейные ограничения на возможные значения u_{kpq} (см. ограничения (2)). Предполагая, что в реальности должно осуществляться состояние с наибольшим статистическим весом, приходим к модели максимизации энтропии (логарифма статистического веса) системы. Энтропийная модель равновесного распределения потоков может быть сформулирована в следующем виде [12]:

$$\sum_{p,q} \sum_{k \in K_{pq}} \left(u_{kpq} \ln\left(\frac{u_{kpq}}{f_{pq}}\right) - u_{kpq} \right) \to \max \tag{3}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} u_a^* &= \sum_{p,q} \sum_{k \in K_{pq}, a \in k} u_{kpq}, \\ F_{pq} &= \sum_{k \in K_{pq}} u_{kpq}, \\ u_{kpq} &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{4}$$

В связи с изложенным представляется интересным сравнить распределения по путям, возникающие при применении алгоритма Франке-Вульфа и маршрутных алгоритмов. Работа этих алгоритмов схематично показана на рис. 5. Пространство возможных наборов значений потоков на дугах u_a представлено в виде одномерной линии. В этом пространстве имеется единственная точка u_a^*, соответствующая равновеснам потокам. При этом пространство возможных распределений по путям u_{kpq} оказывается расслоенным на подпространства, каждое из которых соответствует некоторому фиксированному набору u_a. В каждом из этих подпространств имеется наиболее вероятное (максимизирующее энтропию) распределение u_{kpq}^*. Алгоритмы поиска равновесия обычно начинают работу с распределения корреспонденций по оптимальным путям, вычисленным по свободной сети. Далее осуществляется итеративное перераспределение корреспонденций между путями. Логика этого перераспределения основана на стремлении привести точку u_a к точке равновесия u_a^*. При этом совершенно не учитывается степень близости u_{kpq} к u_{kpq}^*. Вследствие этого отклонение итогового распределения по путям от наиболее вероятного для всех этих алгоритмов выглядит произвольным и сделать теоретически обоснованные выводы трудно.

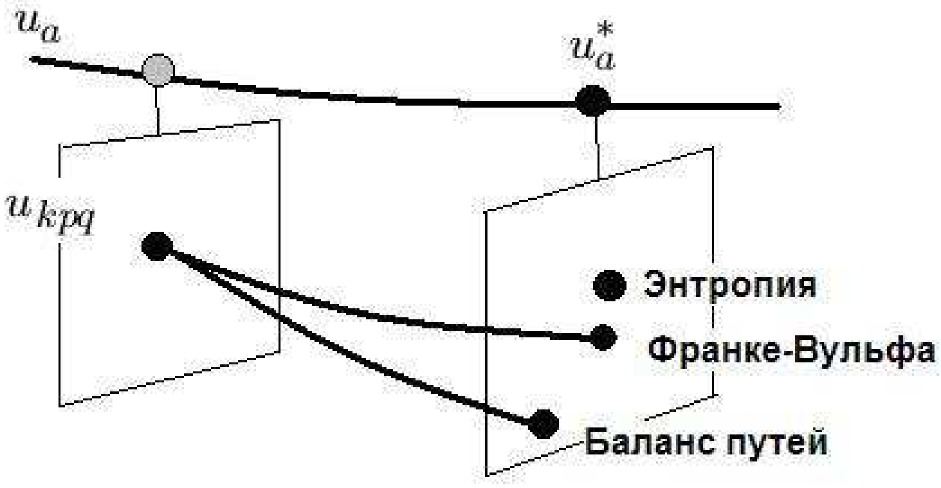

Рис. 5. Сопоставление разных алгоритмов поиска равновесия.

Однако численные эксперименты свидетельствуют о том, что алгоритм Франке-Вульфа часто дает распределение по путям, более близкое к u^*_{kpq}, чем маршрутный алгоритм. В частности, в маршрутном алгоритме резко снижается расщепление корреспонденций по разным путям, то есть алгоритм стремится минимизировать число разных путей. Такие же результаты получены в [13] при сравнении алгоритма Франке-Вульфа с алгоритмом, использующим потоки из общего источника. Возникает вывод, звучащий, на первый взгляд, несколько парадоксально: маршрутные алгоритмы по сравнению с дуговыми обеспечивают лучшую сходимость на дугах, но имеют тенденцию приводить к «худшему» распределению по маршрутам (путям).

По мнению автора данной статьи, данные наблюдения соответствуют объективной тенденции и имеют следующее (нестрогое) объяснение. Распределение по путям, соответствующее максимуму энтропии, является наиболее «случайным» среди всех возможных распределений. В то время как дуговой алгоритм по определению никак не использует информацию о потоках на отдельных путях, маршрутный алгоритм работает с путями индивидуально. Это приводит к тому, что распределение становится более «специальным» и в меньшей степени «случайным».

6. Заключение

Применение принципа равновесия в транспортной сети является основой для компьютерного моделирования загрузки транспортных сетей. В задаче моделирования транспортных потоков можно выделить два уровня: расчет потоков на дугах сети, т.е. расчет загрузки сети, а также расчет распределения всех корреспонденций по путям в сети, которое порождает эту загрузку. Принцип равновесия однозначно определяет потоки на дугах сети, но оставляет большой произвол в выборе распределения по путям. Для устранения этой неопределенности принцип равновесия можно дополнить принципом максимизации энтропии, позволяющим рассчитать наиболее вероятное распределение по путям при известных потоках на дугах.

Наиболее распространенным алгоритмом поиска равновесного распределения с середины 70-х г. является метод Франке-Вульфа. Однако при его применении к очень большим сетям возникают проблемы неравномерности сходимости и «застревающих потоков». В последние годы получили развитие алгоритмы, работающие более индивидуально с распределением отдельных корреспонденций по путям. Эти алгоритмы позволяют улучшить сходимость потоков на дугах, однако полученные с их использованием распределения далеки от распределений с максимальной энтропией.

Корректным решением задачи в перспективе представляется сочетание расчета равновесных значений потоков на дугах одним из известных методов с расчетом распределения корреспонденций по путям методом максимизации энтропии, хотя такой подход сопряжен со значительными вычислительными трудностями в связи с большой размерностью задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Швецов В. И.* Математическое моделирование транспортных потоков // АиТ. 2003. N 11. P. 3–46.

2. *Wardrop J. G.* Some theoretical aspects of road traffic research // Proc. Institution Civil Engineers II. 1952. P. 325–378.

3. *Sheffy Y.* Urban Transportation Networks. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1985.

4. *LeBlanc L. J., Morlok E. K., Pierskalla W.* An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem // Transpn. Res. B. 1975. V. 9. P. 309–318.

5. *Frank M., Wolfe P.* An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. V. 3. P. 95–110.

6. *Boyce D., Ralevic-Dekic B., Bar-Gera H.* Convergence of traffic assignments: How much is enough? // J. Transport. Engineer. 2004. V. 130. N 1. P. 49–55.

7. *Janson B., Zozaya-Gorostiza C.* The problem of cyclic flows in traffic assignment // Transpn. Res. B. 1987. V. 21. P. 299–310.

8. *Patriksson M.* The Traffic Assignment Problem — Models and Methods. Utrecht, Netherlands: VSP, 1994.

9. *Kupsizewska D., Vliet D. Van.* 101 uses for path-based assignment // Transport Planning Methods: Proc., PTRC Planning and Transport Summer Ann. Meeting. U.K.: Univ. Sussex, 1999.

10. *Bar-Gera H.* Origin-based algorithm for the traffic assignment problem // Transpn. Sci. 2002. V. 36. N 4. P. 398–417.

11. *Popkov Yu. S.* Macrosystems theory and its applications. Berlin: Springer Verlag, 1995.

12. *Rossi T. F., McNeil S., Hendrickson C.* Entropy model for consistent impact fee assessment // J. Urban Planning Development/ASCE. 1989. V. 115. P. 51–63.

13. *Bar-Gera H.* Origin-based algorithms for transportation network modeling. Univ. of Illinois at Chicago, 1999.