Элементы теории меры (в конец главы 2)

Здесь и далее в тексте речь идет об учебном пособии авторов А.А. Натан, О.Г. Горбачев, С.А. Гуз по теории вероятностей, выложенной вот здесь http://www.mou.mipt.ru/natan.html

По ходу чтения этой главы у читателя мог возникнуть вопрос: как на практике строить вероятностное пространство? Уже изложенная конструкция: задавать счётно-аддитивную вероятностную меру на σ-алгебре подмножеств множества Ω требует задания вероятностной меры для, вообще говоря, большого количества множеств весьма сложной структуры и каждый раз проверки счётной-аддитивности (для краткости далее будем говорить σ-аддитивности) задаваемой вероятной меры. Хотелось бы, *задавать вероятностную меру только на множествах простой структуры (“элементарных” множествах) и затем, уже по известному алгоритму, продолжать вероятностную меру на множества более сложной структуры* (например, σ-алгебры, содержащие все “элементарные” множества). При этом также хотелось бы *получить легко проверяемые условия на вероятностную меру, заданную на “элементарных” множествах, которые гарантировали бы σ-аддитивность продолженной вероятностной меры*.

Поясним вышесказанное простым, но типичным, примером, с которым мы столкнулись в главе 1 (задача о встрече (пример 1.2)). Напомним условия (считаем, что θ = 1):

Пусть каждое из двух наблюдаемых событий непременно осуществляется (независимо от другого) на отрезке времени [0,1] в неопределенные равновозможные моменты времени. Требуется определить и вычислить вероятность того, что интервал между событиями будет не более $\tau<1$.

Прежде чем считать какие-либо вероятности нужно построить вероятностное пространство, которое бы отражало условия задачи: независимость осуществления событий и равновозможность моментов времени. В качестве пространства элементарных исходов возьмём Ω = [0,1]× [0,1]. В качестве множеств простой структуры Π будем брать $[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)$. Заметим, что Π удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Omega\in\Pi$

2) $A\in\Pi$, $B\in\Pi \Rightarrow A\bigcap B\in\Pi$

3) $A,B\in\Pi$, $B\subseteq A \Rightarrow A\setminus B=\coprod\limits_{i=1}^{n}C_i$, $C_i\in\Pi$,

где $\coprod\limits_{i=1}^{n}C_i$ - означает прямое объединение (сумму) множеств, т.е. $\coprod\limits_{i=1}^{n}C_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n}C_i$, при условии, что $C_i\bigcap C_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=1,\dots,n$. В теории меры множество подмножеств Ω, удовлетворяющих условиям 1) - 3) называют полукольцом с единицей.

Зададим вероятностную меру, отражающую условия задачи, на этих множествах по формуле $P\left([a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\right)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)$.

Оказывается, что можно продолжить меру с Π на максимально возможный класс множеств $\mu\tilde{A}$ (который оказывается σ-алгеброй, причём $A_\tau = \{ t_1, t_2 \in \Omega : |t_1 - t_2| \le \tau \} \in \mu\tilde{A}$) и продолженная мера P_μ^* (мера Лебега) σ-аддитивна на $\mu\tilde{A}$. Примечателен, однако, тот факт, что подобного рода результат справедлив для любого множества элементарных исходов Ω, для любого полукольца с единицей Π на Ω и для любой вероятностной меры P, если она σ-аддитивна на Π. Чтобы это доказать мы приведём схему процедуры построения $\mu\tilde{A}$ и продолжения меры P на $\mu\tilde{A}$. Эту процедуру в теории меры называют продолжением или пополнением по Лебегу.

Способ № 1.

Π - **полукольцо с единицей.** 1) $\Omega \in \Pi$ 2) $A \in \Pi,\ B \in \Pi \Rightarrow A \bigcap B \in \Pi$ 3) $A, B \in \Pi,\ B \subseteq A \Rightarrow A \setminus B = \coprod_{i=1}^{n} C_i,\ C_i \in \Pi$	σ-**аддитивная мера** P_Π **на** Π.
$\tilde{A}$ - **минимальная алгебра, содержащая** Π. $B \in \tilde{A} \Leftrightarrow B = \coprod_{i=1}^{n} C_i,\ C_i \in \Pi$	σ-**аддитивная мера** $P_{\tilde{A}}$ **на** $\tilde{A}$. $P_{\tilde{A}}(B) = \sum_{i=1}^{n} P_\Pi(C_i)$
$\sigma\tilde{A}$ - **минимальная** σ-**алгебра, содержащая** $\tilde{A}$. **Пересечение всех** σ-**алгебр, содержащих** $\tilde{A}$	σ-**аддитивная мера** P_σ^* **на** $\sigma\tilde{A}$. $P_\sigma^*(B) = \inf\limits_{B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i} \sum_{n=1}^{\infty} P_\Pi(A_i)$
$\mu\tilde{A}$ - σ-**алгебра, содержащая** $\sigma\tilde{A}$ **и являющаяся её** P_σ^* **пополнением (лебеговым продолжением).** $B \in \mu\tilde{A} \Leftrightarrow C \subseteq B \subseteq A,\ C, A \in \sigma\tilde{A},\ P_\sigma^*(A \setminus C) = 0$	σ-**аддитивная мера** P_μ^* **на** $\mu\tilde{A}$. $P_\mu^*(B) = P_\sigma^*(A)$

Наименее тривиальным моментом в этой схеме является шаг № 3 (в теории меры обоснование этому шагу даёт теорема Каратеодори). Чтобы лучше понять третий шаг, ниже приведён более простой эквивалентный способ продолжения по Лебегу.

Способ № 2.

В способе № 1 можно изменить шаг № 3 следующим образом

$\tilde{\sigma}\tilde{A}$ - σ-**алгебра, содержащая** $\tilde{A}$. $B \in \tilde{\sigma}\tilde{A} \Leftrightarrow \inf\limits_{B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i} \sum_{n=1}^{\infty} P_{\Pi}(A_i) = \sup\limits_{B \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i} \sum_{n=1}^{\infty} P_{\Pi}(A_i)$	σ-**аддитивная мера** P_{σ}^{*} **на** $\tilde{\sigma}\tilde{A}$. $P_{\sigma}^{*}(B) = \inf\limits_{B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i} \sum_{n=1}^{\infty} P_{\Pi}(A_i)$

Тогда на шаге № 4 нужно вместо $\sigma\tilde{A}$ писать $\tilde{\sigma}\tilde{A}$.

Приведём третий способ продолжения по Лебегу, который часто встречается в учебной литературе. Суть этого способа состоит в том, что процедура пополнения (продолжения) по Лебегу – есть процедура пополнения пространства $\tilde{A}$ (элементами, которого являются множества) в некоторой, специально заданной, метрике $\rho(A,B)$.

Способ № 3.

В способе № 1 можно, минуя шаг № 3, после шага № 2 перейти сразу к шагу № 4. Для этого определим для любого подмножества B множества Ω ($B \in 2^{\Omega}$) его верхнюю меру

$$P^{*}(B) = \inf_{B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i} \sum_{n=1}^{\infty} P_{\Pi}(A_i).$$

Расстоянием между множествами A и B назовём число

$$\rho(A,B) = P^{*}(A \Delta B),$$

где $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ - симметрическая разность.

Множество B - измеримо по Лебегу ($B \in \mu\tilde{A}$) тогда и только тогда, когда

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_{\varepsilon} \in \tilde{A} : \rho(A_{\varepsilon}, B) < \varepsilon.$$

Сопоставление всех трёх способов позволит лучше понять механизм продолжения (пополнения) по Лебегу.

Таким образом, мы поняли, как выбирать множества простой структуры, чтобы потом можно было продолжить *вероятностную меру на множества более сложной структуры*. Но пока открытым остался вопрос, как *получить* *легко проверяемые условия на вероятностную меру, заданную на “элементарных” множествах, т.е. на полукольце с единицей, которые гарантировали бы* σ*-аддитивность продолженной вероятностной меры, т.е.* σ*-аддитивность* $\mathbf{P}$ *на* Π. В частности, пока мы не можем сказать почему в задаче о встречах вероятностная мера $\mathbf{P}([a_1,b_1)\times[a_2,b_2))=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)$ σ-аддитивна на Π.

Ответы на подобного рода вопросы в общей постановки были получены в начале 30-ых годов А.Н. Колмогоровым. Мы отложим изложение этих результатов до главы 6.

Теоремы Колмогорова о продолжении мер

(перед глава 6 § 6.2, возможно, как новый параграф)

В конце главы 2 был поставлена задача: *получить легко проверяемые условия на вероятностную меру* $\mathbf{P}$*, заданную на полукольце с единицей* Π*, которые гарантировали бы* σ*-аддитивность* $\mathbf{P}$ *на* Π. Во многих практических приложениях, возможно, путём перехода к вторичному вероятностному пространству, можно ограничиться следующими вариантами множества элементарных исходов Ω.

1) $\Omega=\mathbf{R}^n, n\in\mathbb{N}$

С таким множеством элементарных исходов мы в основном и сталкивались до сих пор.

В качестве полукольца с единицей Π будем выбирать всевозможные множества вида

$$[x_1^{(0)},x_1^{(1)})\times\ldots\times[x_n^{(0)},x_n^{(1)}),\ -\infty\le x_1^{(0)}<x_1^{(1)}\le\infty, k=1,\ldots,n.$$

2) $\Omega=\mathbf{R}^{\mathbb{N}}=\mathbf{R}^{\infty}$

С подобного рода множествами элементарных исходов мы начнём сталкиваться, начиная уже со следующей главы, при изучении различных типов сходимостей, а продолжим в курсе теории случайных процессов (с дискретным временем) и в курсе математической статистике (основной объект курса: простая выборка – будет элементом $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}$).

В качестве полукольца с единицей Π будем выбирать всевозможные множества вида

$$[x_{k_1}^{(0)},x_{k_1}^{(1)})\times\ldots\times[x_{k_n}^{(0)},x_{k_n}^{(1)})\times\prod_{i\in\mathbb{N}\setminus\{k_1,\ldots,k_n\}}\mathbf{R}_i,\quad n<\infty,$$

$$-\infty\le x_{k_i}^{(0)}<x_{k_i}^{(1)}\le\infty, i=1,\ldots,n,\ K_i<K_{i+1},\ \mathbf{R}_i=(-\infty,\infty).$$

3) $\Omega = R^T$, T - континуальное множество (множество мощности континуум)

Такого рода множества элементарных исходов постоянно возникают в теории случайных процессов (случайных функций).

В качестве полукольца с единицей Π будем выбирать всевозможные множества вида

$$[x_{k_1}^{(0)}, x_{k_1}^{(1)}) \times \ldots \times [x_{k_n}^{(0)}, x_{k_n}^{(1)}) \times \prod_{i \in T \setminus \{k_1,\ldots,k_n\}} R_i,\quad n < \infty,$$

$$-\infty \le x_{k_i}^{(0)} < x_{k_i}^{(1)} \le \infty,\ i \in T,\ K_i < K_{i+1},\ R_i = (-\infty, \infty).$$

В качестве упражнения читателю предлагается убедиться, что во всех трёх случаях заданная система множеств Π действительно является полукольцом с единицей.

Приведём решение поставленной задачи сначала для множества $\Omega = R^n, n \in \mathbb{N}$.

Если задавать вероятностную меру на Π по формуле (6.5)

$$P\{[x_1^{(0)}, x_1^{(1)}) \times \ldots \times [x_n^{(0)}, x_n^{(1)})\} = \begin{cases} (-1)^{\sum_i \alpha_i} \sum\limits_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} F(x_1^{(\alpha_1)},\ldots,x_n^{(\alpha_n)}), \text{ если } n \text{ четно}, \\ (-1)^{\sum_i \alpha_i - 1} \sum\limits_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} F(x_1^{(\alpha_1)},\ldots,x_n^{(\alpha_n)}), \text{ если } n \text{ нечетно}. \end{cases} \quad (*)$$

то как было установлено выше в §6.1, функция $F(x_1,\ldots, x_n)$ должна удовлетворять условиям 1 - 4, 6 – 7 главы 6 §6.1. Если вероятностная мера P, к тому же σ–аддитивна, то должно выполняться и условие 5. Однако, имеет место и обратный результат.

Теорема 1. *Для того, что бы P, задаваемая формулой (*), была вероятностной мерой на Π необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1 -4, 6 – 7 главы 6 §6.1. Для того, что бы P была σ–аддитивной вероятностной мерой на Π необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1 -7 главы 6 §6.1.*

Заметим, что если P абсолютно непрерывна, то существует функция плотности распределения $f(x_1,\ldots, x_n) \ge 0$ и, как следствие теоремы 1, P - является σ–аддитивной вероятностной мерой на Π.

Теперь мы можем ответить на вопрос, поставленный в конце главы 2: *почему в задаче о встрече вероятностная мера* $P([a_1,b_1) \times [a_2,b_2)) = (b_1 - a_1)\cdot(b_2 - a_2)$ σ*-аддитивна на* Π*?* Для этого достаточно заметить, что P - абсолютно непрерывна, поскольку существует, соответствующая функция плотности распределения $f(x_1,x_2) \equiv 1$ (при $\theta = 1$):

$$\mathsf{P}\big([a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\big)=\iint\limits_{\substack{a_1\le x<b_1\\ a_2\le y<b_2}} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{\substack{a_1\le x<b_1\\ a_2\le y<b_2}} 1\cdot dxdy=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2).$$

Приведём теперь решение поставленной в начале этого параграфа задачи для множества $\Omega=\mathbf{R}^{\mathbb{N}}=\mathbf{R}^{\infty}$.

Зададим вероятностную меру на Π по формуле аналогичной (*)

$$\mathsf{P}\left\{[x_{k_1}^{(0)},x_{k_1}^{(1)})\times\ldots\times[x_{k_n}^{(0)},x_{k_n}^{(1)})\times\prod_{i\in\mathbb{N}\setminus\{k_1,\ldots,k_n\}}\mathbf{R}_i\right\}=$$

$$=\begin{cases}(-1)^{\sum_i\alpha_i}\sum\limits_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}\mathsf{F}_{k_1\ldots k_n}(x_1^{(\alpha_1)},\ldots,x_n^{(\alpha_n)}), \text{ если } n \text{ четно},\\ (-1)^{\sum_i\alpha_i-1}\sum\limits_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}\mathsf{F}_{k_1\ldots k_n}(x_1^{(\alpha_1)},\ldots,x_n^{(\alpha_n)}), \text{ если } n \text{ нечетно}.\end{cases} \quad (**)$$

Выпишем условие согласованности семейства функций

$$\mathsf{F}_{k_1\ldots k_n}(x_{k_1},\ldots,x_{k_n}),\ n\in\mathbb{N},\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{N}.$$

Первая часть этого условия аналогична условию (6.7) главы 6 §6.1.

7'. Согласованность:

$$\forall j:\ \lim_{x_{k_j}\to\infty}\mathsf{F}_{k_1\ldots k_n}(x_{k_1},\ldots,x_{k_j},\ldots,x_{k_n})=$$

$$=\mathsf{F}_{k_1\ldots k_n}(x_{k_1},\ldots,x_{k_{j-1}},\infty,x_{k_{j+1}},\ldots,x_{k_n})=$$

$$=\mathsf{F}_{k_1\ldots k_{j-1}k_{j+1}\ldots k_n}(x_{k_1},\ldots,x_{k_{j-1}},\infty,x_{k_{j+1}},\ldots,x_{k_n})$$

и

$\forall\,\pi$ - перестановки элементов $\{k_1,\ldots,k_n\}$

$$\mathsf{F}_{\pi(k_1)\ldots\pi(k_n)}(x_{\pi(k_1)},\ldots,x_{\pi(k_n)})=\mathsf{F}_{k_1\ldots k_n}(x_{k_1},\ldots,x_{k_n}).$$

А.Н. Колмогоровым было доказано следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Для того, что бы* P*, задаваемая формулой (**), была вероятностной мерой на* Π *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{N}$ *для* $\mathsf{F}_{k_1\ldots k_n}(x_{k_1},\ldots,x_{k_n})$ *выполнялись условия 1-4, 6 главы 6 §6.1 и условие согласованности 7'. Для того, что бы* P *была* σ*–аддитивной вероятностной мерой на* Π *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1 -6 главы 6 §6.1 и условие согласованности 7'.*

Выполнив процедуру продолжения по Лебегу (см. конец главы 2) мы сможем находить такие вероятности как

$$\mathbf{P}(x_1 \in \mathbf{B}_1, \ldots, x_n \in \mathbf{B}_n, \ldots),$$

где $\mathbf{B}_n$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ - измеримые (борелевские) множества на прямой.

Пример 6.1. Рассмотрим схему испытаний Бернулли: имеется монетка, вероятность успеха (выпадение орла) равна p=1/2 (монетка симметричная). Показать, что событие $\mathbf{A}$, заключающееся в том, что отношение числа успехов к общему числу бросаний (испытаний) стремится к 1/2 при числе испытаний стремящимся к бесконечности принадлежит $\sigma\tilde{\mathrm{A}}$ (см. главу 2). Считать бросания независимыми.

Возьмём в качестве пространства элементарных исходов пространство последовательностей $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots)$, т.е. $\Omega = \mathbf{R}^{\mathbb{N}} = \mathbf{R}^{\infty}$, где

$$\mathbf{x}_n = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ успех в } \mathbf{n}-\text{ом опыте} \\ \mathbf{0}, \text{ иначе} \end{cases}.$$

Зададим вероятностную меру на Π по формуле (**), где ввиду независимости испытаний следует положить $\forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}) = \mathbf{F}_{\mathbf{k}_1}(x_{k_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{k}_n}(x_{k_n}),$$

$$\forall\ \mathbf{k} \in \mathbb{N} \to \mathbf{F}_{\mathbf{k}}(x) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mathbf{x} > \mathbf{1} \\ \mathbf{1/2}, & \mathbf{x} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1}] \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} \le \mathbf{0} \end{cases}.$$

Согласно теореме 2 и результатам главы 2 можно продолжить эту $\sigma-$аддитивную меру с Π на $\mu\tilde{\mathrm{A}}$, причём полученная при этом мера $\mathbf{P}_{\mu}^{*}$ будет $\sigma-$аддитивной на $\mu\tilde{\mathrm{A}}$.

Положим $\upsilon_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i}{\mathbf{n}}$, тогда $\mathbf{A} = \left\{ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots) : \lim_{n\to\infty} \upsilon_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i}{\mathbf{n}} = \dfrac{1}{2} \right\}$. Введём множества (события)

$$\mathbf{A}_n^{\varepsilon} = \left\{ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots) : \left| \upsilon_n - \frac{1}{2} \right| \ge \varepsilon \right\} \in \tilde{\mathrm{A}},\quad \mathbf{A}^{\varepsilon} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \ge n}^{\infty} \mathbf{A}_k^{\varepsilon} \in \sigma\tilde{\mathrm{A}},$$

тогда

$$\mathbf{A}=\Omega\setminus\left\{\bigcup_{\varepsilon>0}\mathbf{A}^{\varepsilon}\right\}=\Omega\setminus\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathbf{A}^{1/m}\right\}\in\sigma\tilde{\mathrm{A}}\subseteq\mu\tilde{\mathrm{A}},$$

Поэтому, мы можем посчитать вероятность $\mathbf{P}_{\mu}^{*}(\mathbf{A})$ (см. главу 2). Как будет установлено в главе 8 §8.1 $\mathbf{P}_{\mu}^{*}(\mathbf{A})=\mathbf{1}$.

Приведём, наконец, решение (также принадлежащее А.Н. Колмогорову) поставленной в начале этого параграфа задачи “*о получение легко проверяемых условий на вероятностную меру* $\mathbf{P}$*, заданную на полукольце с единицей* Π*, которые гарантировали бы* $\boldsymbol{\sigma}$*-аддитивность* $\mathbf{P}$ *на* Π*”* для множества $\Omega=\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$, где $\mathbf{T}$ - континуальное множество.

Если в условии (**) вместо $\mathbf{i}\in\mathbb{N}\setminus\{\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_n\}$ написать $\mathbf{i}\in\mathbf{T}\setminus\{\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_n\}$, а в теореме 2 вместо $\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_n\in\mathbb{N}$ написать $\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_n\in\mathbf{T}$, то теорема 2 останется справедливой. Существенно заметить, что в отличие от случая 2, когда $\Omega=\mathbf{R}^{\infty}$, теперь мы не сможем вычислить вероятность событий вида

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{\mathbf{T}}:\forall\,\mathbf{t}\in\mathbf{T}\to x_{\mathbf{t}}\in\mathbf{B}_{\mathbf{t}})$$

где $\mathbf{B}_{\mathbf{t}}$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$ - измеримые (борелевские) множества на прямой. Как действовать в подобного рода ситуациях будет рассказано в курсе случайных процессов.