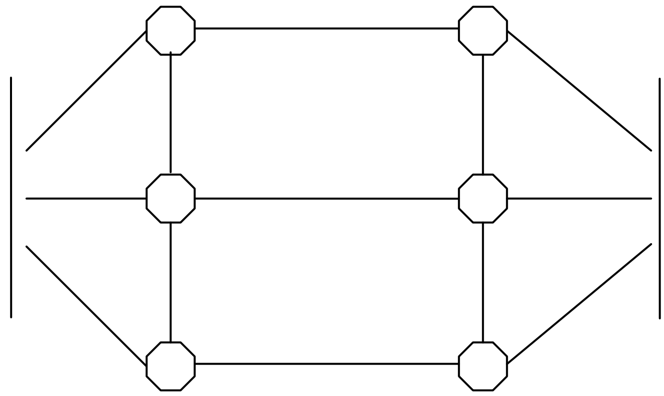
Задачи к занятиям 3 марта

1. На некоторой реке имеется 6 островов, соединенных между собой системой мостов. Во время летнего наводнения часть мостов была разрушена. При этом каждый мост разрушается с вероятностью $1/2$, независимо от других мостов. Какова вероятность того, что после наводнения можно будет перейти с одного берега на другой, используя не разрушенные мосты?



2. Три бабочки капустницы садятся на круглый кочан капусты радиуса 1 случайным образом (имеется в виду, что место положение каждой бабочки – с.в., равномерно распределенная на сфере) и независимо друг от друга. Если между двумя бабочками (геодезическое) расстояние оказывается меньше $\pi/2$, то обе улетают. Найдите вероятность того, что на капусте сидят все три бабочки.

3. Пусть случайный вектор X^n имеет равномерное распределение на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. Пусть Y^n – проекция X^n на первую координатную ось. Докажите, что последовательность $\sqrt{n}Y^n$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине.
Указание: см. в лекции – лемму Пуанкаре.

4. 100 паровозов выехали из города по одноколейке, каждый с постоянной скоростью. Когда движение установилось, то из-за того, что быстрые догнали идущих впереди более медленных, образовались караваны (группы, движущиеся со скоростью лидера). Найдите м.о. и дисперсию числа караванов. Скорости различных паровозов независимы и одинаково распределены, а функция распределения скорости непрерывна.

5. Пусть отличник правильно решает задачу с вероятностью 0.9, а двоечник с вероятностью 0.1. Сколько задач нужно дать на зачете и сколько требовать решить, чтоб отличник не сдал зачет с вероятностью не большей 0.001, а двоечник сдал зачет с вероятностью не большей 0.1?

6 (задача о классе возможных предельных распределений). Рассмотрим простую и классическую схему блуждания точки по прямой, соответствующую правилам игры в орлянку:

$$\eta(0)=0,$$

$$\eta(t+1)=\begin{cases}\eta(t)+1, & p=1/2\\ \eta(t)-1, & p=1/2\end{cases}.$$

Занумеруем в порядке возрастания все моменты времени, когда $\eta(t)=0$. Получим с вероятностью 1 бесконечную последовательность $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\dots$ Рассмотрим разности $\xi_i=\tau_i-\tau_{i-1}$, $i=1,2,\dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных с.в.

а) Найдите распределение $\xi_i=\tau_i-\tau_{i-1}$, т.е. $P\{\xi_i=2m\}$

б) Покажите, что математическое ожидание с.в. $\xi_i=\tau_i-\tau_{i-1}$ равно бесконечности. Этот результат можно проинтерпретировать так: среднее время до первого возвращения блуждания в 0 бесконечно.

Тем не менее суммы $\tau_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ при надлежащей нормировке подчинены предельному распределению:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{2\tau_n}{\pi n^2}<z\right\}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-\frac{1}{2x}}x^{-\frac{3}{2}}dx, & z>0\\ 0, & z<0\end{cases}.$$

Из теоремы о каноническом представлении устойчивых законов (см. лекции, **теорема Леви-Хинчина**): Для того чтобы функция распределения была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы логарифм ее характеристической функции представлялся формулой:

$$\ln\varphi(t)=i\gamma t-c\,|t|^{\alpha}\left(1+i\beta\frac{t}{|t|}\omega(t,\alpha)\right),$$

где γ – любое действительное число, $-1\le\beta\le1$, $0<\alpha\le2$, $c\ge0$ и

$$\omega(t,\alpha)=\begin{cases}tg\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha\right), & \alpha\ne1,\\ \dfrac{2}{\pi}\ln|t|, & \alpha=1\end{cases},$$

следует, что такое распределение соответствует каноническому представлению с $\alpha=1/2$, $\beta=1$, $\gamma=0$, $c=1$, и принадлежит семейству кривых Пирсона (показано Н. В. Смирновым).

7. Напомним, что сингулярными мерами называются меры, функции распределения $F(x)$ которых непрерывны, но точки их роста (x – точка роста $F(x)$, если для любого $\varepsilon>0$ выполняется: $F(x+\varepsilon)-F(x+\varepsilon)>0$) образуют множество нулевой меры Лебега. Покажите, что мера, соответствующая канторовской функции, сингулярна по отношению к лебеговой мере.

8 (вывод распределения Хольцмарка). Рассмотрим шар радиуса r с центром в начале координат и n звезд (точек), расположенных в нем наудачу и независимо друг от друга. Пусть каждая звезда имеет единичную массу. Обозначим $X_1,\dots,X_n$ x-компоненты гравитационных сил, соответствующие отдельным звездам, и положим $S_n=X_1+\dots+X_n$. Устремим r и n к бесконечности так, чтобы $\frac{4}{3}\pi r^3 n^{-1}\to\lambda$. Показать, что распределение величины S_n стремится к симметричному устойчивому распределению (см. задачу 6) с $\alpha=3/2$. Можно показать, что задача по существу не изменится, если массу каждой звезды считать с.в. с единичным математическим ожиданием и массы различных звезд предполагать взаимно независимыми с.в. и не зависящими также от их расположения.

9 (Л. Шепп). Если X – с.в., имеющая стандартное нормальное распределение, то X^{-2} имеет устойчивую плотность из задачи 6:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2x}}x^{-\frac{3}{2}},\ x>0.$$

Используя это, покажите, что если X и Y – независимые нормально распределенные с.в. с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2, то величина $Z=\frac{XY}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ нормально распределена с дисперсией σ_3^2, такой, что $\frac{1}{\sigma_3^2}=\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}$.

Приводимая ниже задача довольно громоздкая (в особенности п. в)) и её можно пропустить (пункт в) рекомендуется проверить с помощью численных экспериментах на компьютере). Тем не менее, хотелось бы отметить, что эта задача довольно полезна и, по-сути, является одной из основных задач в изучении процесса формирования равновесного распределения потоков в транспортной сети.

10. Ориентированный граф $\Gamma=(V,E)$ – транспортная сеть города (V – узлы сети (вершины), $E\subset V\times V$ – дуги сети (рёбра графа)). Пусть $W=\{w=(i,j):i,j\in V\}$ – множество пар источник – сток; $p=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ – путь из v_1 в v_m, если $(v_k,v_{k+1})\in E$, $k=1,...,m-1$, $m\gg 1$; P_w – множество путей, отвечающих корреспонденции $w\in W$; $P=\bigcup_{w\in W}P_w$ – совокупность всех путей в сети Γ; x_p – величина потока по пути p, $\vec{x}=\{x_p:\ p\in P\}$; $G_p(\vec{x})$ – удельные затраты на проезд по пути p, $\vec{G}(\vec{x})=\{G_p(\vec{x}):\ p\in P\}$; y_e – величина потока по дуге e: $y_e=\sum_{p\in P}\delta_{ep}x_p$, где $\delta_{ep}=\begin{cases}1, & e\in p\\ 0, & e\notin p\end{cases}$ ($\vec{y}=\Theta\vec{x}$, $\Theta=\{\delta_{ep}\}_{e\in E,p\in P}$); $\tau_e(y_e)$ – удельные затраты на проезд по дуге e (как правило, возрастающие, выпуклые, гладкие функции), естественно считать, что $G_p(\vec{x})=\sum_{e\in E}\tau_e(y_e)\delta_{ep}$ ($\vec{G}(\vec{x})=\Theta^T\vec{\tau}(\vec{y})$). Пусть также известна матрица корреспонденций d_w, $w\in W$. Тогда вектор $\vec{x}$, характеризующий распределение потоков, должен лежать в допустимом множестве:

$$X=\left\{\vec{x}\ge 0:\ \sum_{p\in P_w}x_p=d_w,\ w\in W\right\}.$$

Рассмотрим игру, в которой каждому элементу $w\in W$ соответствует свой, достаточно большой ($d_w\gg 1$), набор однотипных “игроков” (“сидящих на корреспонденции w”). Множеством чистых стратегий каждого такого игрока является P_w, а выигрыш (потери со знаком минус) определяются формулой $-G_p(\vec{x})$ (игрок “выбирает” путь следования $p\in P_w$, при этом он пренебрегает тем, что от его выбора также “немного” зависят $|P_w|$ компонент вектора $\vec{x}$ и, следовательно, сам выигрыш $-G_p(\vec{x})$).

а) Покажите, что отыскание равновесия Нэша(–Вардропа) $\vec{x}^*\in X$ (макро описание равновесия) равносильно решению задачи нелинейной комплементарности (принцип Дж. Г. Вардропа (1952)), что равносильно решению вариационного неравенства:

$$\forall\ w\in W,\ p\in P_w\to x_p^*\cdot\left(G_p(\vec{x}^*)-\min_{q\in P_w}G_q(\vec{x}^*)\right)=0\ \Leftrightarrow\ \forall\ \vec{x}\in X\to\left\langle\vec{G}(\vec{x}^*),(\vec{x}-\vec{x}^*)\right\rangle\ge 0.$$

Покажите, что задача отыскания равновесия Нэша–Вардропа сводится к решению, следующей задачи выпуклого программирования:

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_{e\in E} \int_0^{\sum_{p\in P}\delta_{ep}x_p} \tau_e(z)\,dz \to \min_{\vec{x}\in X}.$$

б)* Предположим, что свой путь на $(n+1)$-м шаге[1] игрок, сидящий на корреспонденции w, выбирает согласно смешанной стратегии (в независимости от всех остальных): с вероятностью

$$\mathrm{Prob}_p^w(n+1) = \gamma \exp\left(-G_p\left(\vec{x}(n)\right)\big/T\right)\Big/Z_n^w,\ \ w\in W, \qquad (*)$$

выбрать путь $p\in P_w$ ($0<\gamma\le 1$), а с вероятностью $1-\gamma$ – действовать согласно стратегии, использованной на предыдущем n-м шаге. Здесь $x_p(n)$ – количество игроков, сидящих на корреспонденции w и выбравших на n-м шаге стратегию $p\in P_w$, статсумма $Z_n^w = \sum_{p\in P_w} \exp\left(-G_p\left(\vec{x}(n)\right)\big/T\right)$, $T>0$ – "температура" (горячность) игроков. Это хорошо известное logit-распределение или распределение Гиббса. Оно может быть проинтерпретировано, как выбор каждым игроком наилучшей стратегии вчерашнего дня, если игрок "переносит" затраты вчерашнего дня $G_p\left(\vec{x}(n)\right)$ на день сегодняшний, но допуская при этом случайные флуктуации $G_p\left(\vec{x}(n)\right)+\xi_p$, где ξ_p – независимые случайные величины, имеющие одинаковое двойное экспоненциальное распределение (распределение Гумбеля (см. предыдущее задание)). Покажите, что $\arg\min_{p\in P_w}\left\{G_p\left(\vec{x}(n)\right)+\xi_p\right\}$ как раз имеет указанное выше logit-распределение.

в)* Пусть $\forall\ e\in E \to \tau_e'(\,\cdot\,)>0$ и $x_p^*>0 \Rightarrow x_p^* \gg 1$. Тогда стохастическая марковская динамика (*) "сходится" на больших временах к некоторому стационарному распределению вероятностей, которое называют «стохастическим равновесием в транспортной сети». В предположении, что $T>0$ и $\gamma>0$ – должным образом малы, покажите, что это стационарное распределение сконцентрировано в малой окрестности такого равновесия Нэша–Вардропа:

$$\vec{x}^* = \arg\min_{\vec{x}\in X:\,\Theta\vec{x}=\vec{y}^*} \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}\left(x_p \ln\left(x_p/|P_w|\right) - x_p\right),$$

где $\vec{y}^*$ – единственное решение задачи

$$V(\vec{y}) = \sum_{e\in E}\int_0^{y_e} \tau_e(z)\,dz \to \min_{\vec{y}=\Theta\vec{x},\ \vec{x}\in X}.$$

---

[1] Например, шаг с периодом в день можно проинтерпретировать как выбор утром маршрута следования (пути) из дома на работу, исходя из «опыта» вчерашнего дня. Заметим, что информацию о $G_p\left(\vec{x}(n)\right)$ водители (игроки) черпают из открытых источников типа Яндекс.Пробки.