Задачи к занятиям 17 марта

1. (О связной компоненте в случайном графе в модели Эрдёша-Реньи). Пусть есть конечное множество (в дальнейшем множество вершин) V. $\xi_{vv'}$ - независимые с.в., занумерованные парами $\{v,v'\} \in V \times V$.

$$\xi_{vv'} = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}.$$

Таким образом, можно задать абстрактный случайный граф на фиксированном множестве вершин. Покажите, что

1) при $p = \frac{1}{N^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ среднее число неизолированный вершин в случайном графе $o(N)$.

2) при $p = \frac{1}{N^{1-\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ существует связная компонента порядка N.

2. Рассматривается конфигурация спинов $\omega = \{x_{mn}\}$ (где x_{mn} - независимые бернуллиевские с.в. с параметром p) на двумерной решетке $\{(m,n)\} \in \mathbb{Z}^2$. Вершину (m,n) назовем занятой, если $x_{mn} = 1$. Соединим ребром все соседние (находящиеся на расстоянии 1) занятые вершины. Получится случайный граф $G = G(\omega)$. Назовем кластером графа G максимальное подмножество A вершин решетки такое, что для любых двух $v, v' \in A$ существует связывающий их путь по ребрам графа G. Докажите, что существует такое $0 < \bar{p} < 1$, что при $p < \bar{p}$ все кластеры конечны с вероятность 1, а при $p > \bar{p}$ с положительной вероятностью есть хотя бы один бесконечный кластер.

Указание: Покажите, что при достаточно малых значения p вероятность события, что все кластеры конечны, равна 1. Покажите, что вероятность того, что кластер, содержащий начало координат и имеющий не менее N вершин, не превосходит $(Cp)^N \underset{N\to\infty}{\to} 0$, где C - некоторая константа. А значит и событие: бесконечный кластер содержит начало координат - имеет нулевую вероятность.

3. (Распределения канторовского типа). Рассмотрим в $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$, где X_k - взаимно независимые с.в., имеющие распределение Бернулли с параметром $1/2$, сумму слагаемых с четными номерами, или, что с точностью до множителя 3 (в дальнейшем потребуется для удобства) есть $Y = 3\sum_{s=1}^{\infty} 4^{-s} X_s$. Покажите, что функция распределения $F(x) = P\{Y \le x\}$ является сингулярной (когда не оговаривается относительно какой меры, подразумевается, что относительно меры Лебега).

Указание: Можно рассматривать Y как выигрыш игрока, который получает $3 \cdot 4^{-k}$, когда k-е бросание симметричной монеты дает в результате решку. Ясно, что полный выигрыш лежит между 0 и $3(4^{-1} + 4^{-2} + \dots) = 1$. Если первое подбрасывание монеты привело к решке, то полный выигрыш $\ge 3/4$, тогда как в противоположном случае $Y \le 3(4^{-2} + 4^{-3} + \dots) = 4^{-1}$. То есть неравенство $1/4 < Y < 3/4$ не может быть осуществлено ни при каких обстоятельствах, значит $F(x) = 1/2$ в интервале $x \in (1/4, 3/4)$. Чтобы определить, как ведет себя функция распределения на интервале $x \in (0, 1/4)$, покажите, что на этом интервале график отличается только преобразованием подобия $F(x) = 1/2\,F(4x)$.

Замечание: Пример, когда свертка двух сингулярных распределений имеет непрерывную плотность: с.в. $X = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$ имеет равномерное распределение на $(0;1)$. Обозначим сумму членов ряда с четными и нечетными номерами через U и V соответственно. Ясно, что U и $2V$ имеют одинаковое распределение и их распределение относится к канторовскому типу.

4. **(Максимальный показатель Ляпунова).** Пусть имеется последовательность независимых одинаково распределенных случайных матриц g_k (распределение g_k - имеет плотность). Покажите, что существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|g_n \cdot \ldots \cdot g_1\| = \lambda .$$

5. **(Случайное блуждание в полуплоскости).** Пусть частица находится в начальный момент в одной из точек полуплоскости $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_+$, и совершает на каждом шаге скачок из $(k,l) \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_+$ в одну из четырех соседних точек решетки $(k+i, l+j)$ с вероятностями p_{ij} (если $l > 0$) и в одну из трех соседних точек решетки с вероятностями q_{ij} (если $l = 0$). Считая, что $\sum_j j p_{ij} < 0$ опишите движение частицы (движение к границе и последующее движение вдоль границы).

6. **(Одномерная модель Изинга).** Рассмотрим конечный отрезок одномерной целочисленной решетки $\{0,1,2,\ldots,n\}$ в каждой вершине k которой находится спин, принимающий два значения $\sigma(k) = \pm 1$. При этом считаем, что $\sigma(0) = \sigma(n) \equiv 1$. Определим Гамильтониан системы $H(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(1 - \sigma(k)\sigma(k+1)\right)/2$. Определим распределение Больцмана-Гиббса по формуле $\pi(\sigma) = Z^{-1} \exp\left(-\beta H(\sigma)\right)$, $\beta = T^{-1} > 0$ - величина, обратная “температуре”, а Z - нормирующий множитель (статсумма). Одним из стандартных способов построения однородной дискретной марковской цепи с заданным стационарным распределением $\pi(\sigma)$ является использование динамики Глаубера:

1. Выбираем $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ согласно равномерному распределению.
2. С вероятностью $p = \exp\left(-\beta H(\sigma_{k,+1})\right) / \left(\exp\left(-\beta H(\sigma_{k,+1})\right) + \exp\left(-\beta H(\sigma_{k,-1})\right)\right)$ новым состоянием будет $\sigma_{k,+1}$, а с вероятностью $1-p$ - $\sigma_{k,-1}$, где

$$\sigma_{k,+1}(i) = \sigma_k(i),\ i \ne k,\ \sigma_{k,+1}(k) = 1;\ \sigma_{k,-1}(i) = \sigma_k(i),\ i \ne k,\ \sigma_{k,-1}(k) = -1.$$

Покажите, что mixing time (характерное время выхода на стационарное распределение) этой марковской цепи оценивается сверху как $n^{2\log_2(\beta e)}$ в предположении $\beta \gg 1$.