Задачи по занятиям 18 февраля

1. (А.Я. Червоненкис) Покажите, что неравенство Чебышева:

$$P\{|X-EX|>\varepsilon\}\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

принципиально не улучшаемо.

Указание: рассмотрите с.в.

$$X=\begin{cases} a, & p/2 \\ 0, & 1-p \\ -a, & p/2 \end{cases}$$

Положите $\varepsilon=a-\delta$, где $\delta\to 0+$.

2. а) (А. Шень) В лотерее на выигрыш уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Доказать, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.

Указание: использовать неравенство Маркова.

Замечание: искомая вероятность зависит, конечно, от правил лотерее, но ни при каких условиях она не превосходит 0.8%<1%.

б) приведите пример правил лотереи, где искомая вероятность минимальна и максимальна.

3. Напомним определение слабой сходимости (сходимости по распределению):

$\xi_n \underset{(weak)}{\overset{distribution}{\to}} \xi$ - для любого x, такого что функция $F_\xi(x)$ непрерывна в точке x, имеет место сходимость функций распределения: $F_{\xi_n}(x)\to F_\xi(x)$ при $n\to\infty$, где $F_\xi(x)$ - функция распределения с.в. ξ.

а) Объясните, почему нет слабой сходимости такой последовательности с.в.:

$$\xi_n=\begin{cases} -n, & 1/2, \\ n, & 1/2; \end{cases}$$

Указание:

$$F_{\xi_n}(x)=\begin{cases} 0, & x\le -n \\ 1/2, & -n<x\le n \\ 1, & x>n \end{cases} \text{ сходятся к функции } G(x)\equiv\frac{1}{2}.$$

б) Пусть $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots$ - последовательность независимых одинаково распределенных с.в. с конечной ненулевой дисперсией. Обозначим $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. При каких значениях c имеет или не имеет место сходимость $P\left(\frac{S_n}{n}<c\right)\to P\left(E\xi_1<c\right)$?

в) Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{0.999999n}\frac{1}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-y}dy=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\frac{1}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-y}dy=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1.0000001n}\frac{1}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-y}dy=1.$$

Указание: Каждый из интегралов есть распределение суммы независимых с.в. с некоторым показательным распределением. Учитывайте, что показательное распределение есть частный случай гамма распределения, которое устойчиво относительно суммирования.

Напомним, что

1) с.в. ξ имеет гамма распределение с параметрами $\alpha>0$, $\lambda>0$, если плотность её распределения:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{\alpha^\lambda x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}}{\Gamma(\lambda)}, & x>0\end{cases};$$

2) с.в. ξ имеет показательное распределение с параметром $\alpha>0$, если плотность её распределения:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \alpha e^{-\alpha x}, & x>0\end{cases}.$$

4. Пусть при любом $\lambda>0$ с.в. ξ_λ имеет распределение Пуассона. Докажите, что $\dfrac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ слабо сходится к стандартному нормальному распределению при $\lambda\to\infty$.

Указание: используйте аппарат характеристических функций и теорему о непрерывном соответствии (о том, что слабая сходимость эквивалентна сходимости соответствующих характеристических функций).

5. Доказать локальную предельную теорему:

Пусть $0<p<1$ и X_i, $i=1,\ldots,n$ - независимые случайные величины, имеющие распределение:

$$X_i=\begin{cases}1, & p,\\ -1, & q=1-p;\end{cases}$$

Тогда равномерно по всем $x=O\left(\sqrt{n}\right)$ таким, что $(p-q)n+x$ целое неотрицательное число

$$P\left\{\sum_{i=1}^n X_i=(p-q)n+x\right\}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2npq}\right\}$$

при $n\to\infty$.

Указание: воспользоваться формулой Стирлинга

Замечание: пусть $n=2k$ и $p=\dfrac{1}{2}$, тогда вероятность того, что число единиц в точности рано числу минус единиц мало (но не экспоненциально мало):

$$P\left\{\sum_{i=1}^{2k} X_i=k\right\}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

6. Доказать оценку для больших уклонений в Бернуллиевской модели:

$$X_i=\begin{cases}1, & p,\\ 0, & q=1-p;\end{cases}$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i = [\alpha n]\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)}} \exp\{nH(\{p,1-p\},\{\alpha,1-\alpha\})\},\ 0<\alpha<1 \text{ и } \alpha \neq p$$

Как и в предыдущем домашнем задании для оценки Чернова: $H(P,Q)=\sum_{j=1}^{m} -P_j \log\frac{P_j}{Q_j}$ - относительное энтропийное «расстояние» между двумя (дискретными) распределениями вероятностей $P=(P_1,\dots,P_m)$ и $Q=(Q_1,\dots,Q_m)$ на пространстве элементарных исходов размера m.

Указание: напомним, что производящей функцией (п.ф.) некоторой целочисленной неотрицательной случайной величины (с.в.) ξ называется $\varphi_\xi(z)=Ez^\xi=\sum_{j=0}^{\infty} P\{\xi=j\}z^j$.

Зная распределение с.в. можно получить ее п.ф., и наоборот, задание п.ф. однозначно определяет ее распределение: (для этого можно воспользоваться теорией функций комплексного переменного – теоремой Коши – для определения коэффициентов в разложении аналитической функции в ряд Лорана) $P\{\xi=k\}=[z^k]\varphi_\xi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{\varphi_\xi(z)}{z^{k+1}}dz$.

Также следует напомнить, что п.ф. для суммы независимых с.в. справедливо $\varphi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(z)=Ez^{\sum_{i=1}^{n} X_i}=E\left[\prod_{i=1}^{n} z^{X_i}\right]=\prod_{i=1}^{n} Ez^{X_i}=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(z)$. Таким образом, в данной задаче $P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i=[\alpha n]\right\}=\left[z^{[\alpha n]}\right]\varphi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=\rho}\frac{(pz+q)^n}{z^{[\alpha n]+1}}dz$, последний интеграл можно оценить с помощью методе перевала: перейдя к полярным координатам $z=\rho e^{i\theta}$ и сделав замену, получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(pz+q)^n}{z^{[\alpha n]+1}}dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{nf(\rho e^{i\theta})}d\theta,$$

где $f(z)=\ln(pz+q)-\left(\alpha-\frac{\varepsilon_n}{n}\right)\ln z$ ($[\alpha n]=\alpha n-\varepsilon_n$). Далее, нужно найти седловую точку и ограничиться интегрированием по её малой окрестности, разлагая подынтегральное выражение в ряд Тейлора.

7. (Рулетка) В игре в рулетку колесо разделено на 38 равных секторов: 18 красных, 18 белых и два сектора (0 и 00) зеленого цвета. Пусть ставка игрока на каждом шаге равна 1$. Обозначим X_i - выигрыш в i-ой игре. Тогда $X_1, X_2, X_3, \dots$ - независимые с.в., имеющие распределение:

$$X_i=\begin{cases}+1, & 18/38,\\ -1, & 20/38;\end{cases}$$

Пусть сыграно $n=361=19^2$ партий. Оцените с помощью ЦПТ $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 0\right)$ и с помощью неравенства Берри-Эссена оцените погрешность приближения.

8. (Петербургский парадокс) $X_1, X_2, X_3, \dots$ - независимые с.в., имеющие распределение $P\left(X_i=2^k\right)=2^{-k}$, $k=1,2,3,\dots$ То есть, если в игре в орлянку k раз выпал «орел», то

выигрыш будет 2^k. Справедливой ценой за игру называют математическое ожидание выигрыша. Но здесь $EX_i = \infty$, однако, для этого нужно играть бесконечное число раз и иметь бесконечно много денег. Покажите, что $\frac{S_n}{n\log_2 n} \xrightarrow{p} 1$ при $n \to \infty$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Проинтерпретируйте результат как цена за n игр?
Указание: Пусть для каждого n с.в. X_{nk}, $1 \le k \le n$ независимы. Пусть также $b_n > 0$ с $b_n \to \infty$ и $\bar{X}_{nk} = X_{nk} \mathrm{I}\{X_{nk} \le b_n\}$.(где $\mathrm{I}\{...\}$ - индикаторная функция). Предположим, что выполняются условия:

1) $\sum_{k=1}^{n} P\{|X_{nk}| > b_n\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

2) $\frac{\sum_{k=1}^{n} D\bar{X}_{nk}}{b_n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Тогда $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_{nk} - \sum_{k=1}^{n} E\bar{X}_{nk}}{b_n} \xrightarrow{p} 0$ при $n \to \infty$.

Для этой теоремы положите $X_{nk} = X_k$. В качестве $b_n > 0$ возьмите $b_n = 2^{m(n)}$, где $m(n)$ - целое число, которое можно представить в виде $m(n) = \log_2 n + K(n)$, $K(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Например, если $K(n) \le \log\log n$, то результатом применения теоремы будет $\frac{S_n}{n\log_2 n} \xrightarrow{p} 1$ при $n \to \infty$.

9. Нечестная «Честная игра». Случайная величина (размер выигрыша) принимает значение $2^k - 1$ с вероятностью $p_k = \frac{1}{2^k k(k+1)}$ для $k = 1, 2, 3, ...$ и значение -1 с вероятностью $p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k$. Проверьте, что математическое ожидание выигрыша равно нулю. Применив теорему из предыдущей задачи, покажите, что для суммарного размера выигрыша за n партий (S_n) справедливо $\frac{S_n}{n/\log_2 n} \xrightarrow{p} 1$.

Указание: положите $b_n = 2^{m(n)}$, где $m(n) = \min\left\{m : 2^{-m} m^{-3/2} \le n^{-1}\right\}$

10. Игра с отгадыванием монеты. Один игрок прячет (зажимает в кулаке) одну или две монеты достоинством 10 рублей. Другой игрок должен отгадать сколько денег у первого спрятано. Если отгадывает, то получает деньги, если нет – платит 15 рублей. Каковы “должны” быть стратегии игроков при многократном повторении игры?