**Задачи по занятиям 25 февраля**

1. **(А.Х. Шень)** Ведущий приносит два одинаковых конверта и говорит, что в них лежат деньги, причем в одном вдвое больше, чем в другом. Двое участников берут конверты и тайком друг от друга смотрят, сколько в них денег. Затем один говорит другому: «Махнемся не глядя?» (предлагая поменяться конвертами). Стоит ли соглашаться?

2. **(Н.К. Верещагин)** Имеется неизвестное число от 1 до $n$ ($n \ge 2$). Разрешается задавать любые вопросы с ответами ДА/НЕТ. При этом при ответе ДА мы платим 1 рубль, при ответе НЕТ – 2 рубля. Сколько необходимо и достаточно заплатить для отгадывания числа?

3. **(Н.К. Верещагин)** Пусть казино делает $n$ бросаний, используя распределение вероятностей на бинарных словах длины $n$ $p(x)$, где $x = \{0,1\}^n$, известное игроку. При этом казино производит выплаты так, как если бы оно использовало распределении $q(x)$ (то есть выигранная ставка на 0, после выпадения $x$ исходов увеличивается в $\dfrac{q(x)}{q(x0)}$ раз, выигранная ставка на 1, после выпадения $x$ исходов увеличивается в $\dfrac{q(x)}{q(x1)}$ раз, см. семинар). Докажите, что у игрока есть стратегия, логарифм значения капитала которой равен расстоянию Кульбака-Лейблера $\sum\limits_{x\in\{0,1\}^n} p(x)\log\dfrac{p(x)}{q(x)}$ между распределениями $p$ и $q$.

   **Определение.** Распределение $G(x)$ называется max-устойчивым, если для любых $n = 1, 2, \ldots$ существуют $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$, такие что $G^n(a_n x + b_n) = G(x)$.

4. **(MAX-устойчивые распределения: Гумбеля, Фреше, Вейбулла).** Пусть есть независимые одинаково распределенные с.в. $X_1, \ldots, X_n$ с распределением $F(x)$. Обозначим $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Распределение такой с.в. $F_{X_{(n)}}(x) = \left[F(x)\right]^n$.
   1) Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\alpha x}\left(1 - F(x)\right) = \beta$, где $\alpha, \beta > 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Покажите, что $X_{(n)} - \dfrac{1}{\alpha}\ln(\beta n) \xrightarrow{d} \chi$, где $\chi$ имеет распределение Гумбеля: $P(\chi \le x) = e^{-e^{-\alpha x}}$, $x \in \mathbb{R}$.
   2) Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\left(1 - F(x)\right) = \beta$, где $\alpha, \beta > 0$ и $x \in \mathbb{R}_+$. Покажите, что $X_{(n)}(\beta n)^{-\frac{1}{\alpha}} \xrightarrow{d} \eta$, где $\eta$ имеет распределение Фреше: $P(\eta \le x) = e^{-x^{-\alpha}}$, $x > 0$.
   3) Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} (c - x)^{\alpha}\left(1 - F(x)\right) = \beta$, $F(c) = 1$,где $\alpha, \beta > 0$, $c \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$. Покажите, что $\left(X_{(n)} - c\right)(\beta n)^{\frac{1}{\alpha}} \xrightarrow{d} \gamma$, где $\gamma$ имеет распределение Вейбулла: $P(\gamma \le x) = e^{-(-x)^{-\alpha}}$, $x < 0$.

   Покажите, что распределения Гумбеля, Фреше, Вейбулла являются max-устойчивыми.
   **Замечание:** в классе max-устойчивых распределений распределения Гумбеля, Фреше, Вейбулла исчерпывают все возможные типы предельных распределений.

**5.** Пусть есть независимо одинаково распределенные с.в. $X_1,\dots,X_n$ с распределением Коши $\alpha = 1$, т.е. $F(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dy}{1+y^2}$. Воспользовавшись предыдущей задачей, найдите предельное распределение для должным образом нормированных с.в. $X_{(n)}$.

**6.** Пусть $\vec{X}_n \in \mathbb{R}^m$, $n = 1, 2, \dots$ - независимые одинаково распределенные случайные векторы. $M\vec{X}_n = \vec{0}$, $M\vec{X}_n\vec{X}_n^T = R$ ($R$ - неотрицательно определенная матрица - по определению, однако, мы дополнительно будем считать, что $R$ - положительно определенная). С помощью аппарата характеристических функций докажите, что тогда для любого борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}^m$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}\vec{X}_n \in B\right) = \left((2\pi)^m \det R\right)^{-1/2}\int\limits_B e^{-(\vec{x},R\vec{x})}d\vec{x}.$$

**7.** Покажите, что все моменты распределения $p_\lambda(x) = \frac{1}{24}e^{-x^{1/4}}\left(1-\lambda\sin x^{1/4}\right)$, $x \ge 0$ при любом значении параметра $\lambda \in [0,1]$ совпадают.

**Замечание:** необходимое и достаточное условие того, чтобы моменты однозначно определяли распределение, вообще говоря, комплексной случайной величины $x$, имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(M\left(|x|^{2n}\right)\right)^{-1/(2n)} = \infty \text{ (условие Карлемана).}$$

По задачам 4-7 рекомендуется книга *А.М. Чеботарева* Введение в теорию вероятностей и математическую статистику для физиков. М.: МФТИ, 2009.