Задачи по занятиям 11 февраля

1. Доказать неравенство Чернова

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i > (p+t)n\right\} \le \exp\left\{nH\left(\{p+t, q-t\}, \{p,q\}\right)\right\}, \quad 0 \le t \le q,$$

где X_i, $i = 1,\dots,n$ - независимые случайные величины, имеющие распределение Бернулли:

$$X_i = \begin{cases} 1, & p, \\ 0, & q = 1-p; \end{cases}$$

$H(P,Q) = \sum_{j=1}^{m} -P_j \log \frac{P_j}{Q_j}$ - относительное энтропийное «расстояние» между двумя (дискретными) распределениями вероятностей $P = (P_1,\ldots,P_m)$ и $Q = (Q_1,\ldots,Q_m)$ на пространстве элементарных исходов размера m.

Указание: воспользуйтесь техникой получения неравенства Азумы, рассказанной на лекции, а именно

а) перейдите к положительной случайной величине $e^{\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i}$ ($\lambda > 0$ - некий параметр). В теории вероятностей функция $\varphi_Y(\lambda) = E\left[e^{\lambda Y}\right]$ называется производящей функции моментов случайной величины Y, так как при разложении в ряд Тейлора $\varphi_Y(\lambda) = E\left[e^{\lambda Y}\right] = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} Y^i\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} E\left[Y^i\right]$, где $E\left[Y^i\right]$ - i-ый момент случайной величины Y.

б) применив неравенство Маркова, получите $P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i > m\right\} = P\left\{e^{\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i} > e^m\right\} \le \left(\frac{pe^{\lambda} + q}{e^{\lambda(p+t)}}\right)^n$

с параметризацией $m = (p+t)n$.

в) подобрав оптимальное значение ($\frac{pe^{\lambda}+q}{e^{\lambda(p+t)}} \to \min_{\lambda}$), получите

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i > (p+t)n\right\} \le \left(\left(\frac{p}{p+t}\right)^{p+t}\left(\frac{q}{q-t}\right)^{q-t}\right)^n = \exp\left\{n\left[-(p+t)\ln\frac{p+t}{p} - (q-t)\ln\frac{q-t}{q}\right]\right\}.$$

Замечания: с точки зрения математической статистики $H\left(\{p+t, q-t\}, \{p,q\}\right) = -(p+t)\ln\frac{p+t}{p} - (q-t)\ln\frac{q-t}{q}$ - энтропийное расстояние между апостериорным (полученным после эксперимента) распределением $\{p+t, q-t\}$ и априорным $\{p,q\}$. Таким образом, «граница» Чернова уменьшается экспоненциально с показателем равным n-кратному энтропийному расстоянию между апостериорным и априорным распределением вероятностей.

Более удобная запись «границы» Чернова:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i > (p+t)n\right\} \le \exp\left\{-\frac{2t^2}{n}\right\},$$

так как для функции $f(t)=(p+t)\ln\frac{p+t}{p}+(q-t)\ln\frac{q-t}{q}$ имеем $f(0)=f'(0)=0$, $f''(t)=\frac{1}{(p+t)(q-t)}\geq 4$ для любого $0\leq t\leq q$, значит разложение Тейлора

$$f(t)=f(0)+f'(0)t+f''(\xi)\frac{t^2}{2!}\geq 2t^2,\quad 0<\xi<t.$$

2. Согласно законам о трудоустройстве в городе *N*, наниматели обязаны предоставить всем рабочим выходной, если хотя бы у одного из них день рождения, и принимать на службу рабочих независимо от их дня рождения. За исключением этих выходных рабочие трудятся весь год из 365 дней. Предприниматели хотят максимизировать среднее число человеко-дней в году. Сколько рабочих трудятся на фабрике в городе *N*?
Указание: Введем обозначения: m - число дней в году ($m=365$), n - число рабочих на фабрике, X_n - случайная величина, равная числу выходных в году у n рабочих согласно закону о трудоустройстве этого города. Тогда предприниматель для определения оптимального числа рабочих у себя на фабрике должен максимизировать $n\left(m-E\left[X_n\right]\right)\to\max\limits_{n\in\mathbb{N}}$ (где n - натуральное число).

3. В начале карточной игры принято с помощью жребия определять первого сдающего. Жребий бросается так: колоду хорошо тасуют, и затем кто-нибудь сдает игрокам по карте до появления первого туза. Кому выпал туз – тот и сдает в первой игре. На каком месте в среднем появляется первый туз, если в колоде 32 карты (то есть найти математическое ожидание случайной величины «Число карт, сданных до первого туза»)?
Указание: задача на свойство линейности математического ожидания.

4. а) Приведите пример вероятностного пространства и трёх событий на этом пространстве, которые попарно независимы, но зависимы в совокупности. Достаточно рассмотреть вероятностное пространство, порожденное бросанием шестигранного кубика.
б) Предложите обобщение этой задачи, в котором любые *n* из *n*+1 событий независимы в совокупности, а эти (*n*+1) – зависимы в совокупности.

5. При каждом подбрасывании монета падает вверх орлом с вероятностью $p>0$. Пусть π_n - вероятность того, что число орлов после $n\in\mathbb{N}$ независимых подбрасываний будет чётно. Показав, что $\pi_{n+1}=\left(1-p\right)\cdot\pi_n+p\cdot\left(1-\pi_n\right)$, $n\in\mathbb{N}$, или иным способом найдите π_n. Число 0 считаем чётным.

6. Симметричную монету независимо бросили n раз. Результат бросания записали в виде последовательности нулей и единиц. Покажите, что с вероятностью стремящейся к единице при $n\to\infty$ длина максимальной подпоследовательности из подряд идущих единиц лежит в промежутке

$$\left(\log\sqrt{n},\log n^2\right).$$