Задачи по геометрическим вероятностям

Александр Родин, МФТИ

4 июня 2012 г.

1 Многоугольник в окружности

Какова вероятность того, что выпуклый n-угольник с вершинами, случайно расположенными на окружности, содержит ее центр?

Источник: Журнал «Квант», январь 1991 года, статья «Геометрические вероятности»,
http://kvant.mccme.ru/1991/01/geometricheskie_veroyatnosti.htm

2 Длина секущих

Найти среднюю длину секущих трехмерного куба - лежащих внутри куба отрезков прямых, проходящих через этот куб. Ребро куба равно 1.

3 Расстояние между точками

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой задан n-мерный шар единичного радиуса. Внутри него имеются две случайные точки с радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ соответственно, имеющие равномерное пространственное распределение внутри шара. Найти распределение случайной величины, являющейся средним расстоянием между этими двумя точками $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

Источник: М. Кендалл, П. Моран, Геометрические вероятности.
https://docs.google.com/open?id=0B1ptvF0qUV6hRUVlZlJCaTZWdms

4 Парадокс Ольберса

Рассмотрим звезды, находящиеся на расстоянии, не превышающем R от наблюдателя. Для простоты будем считать, что все звезды имеют одинаковый диаметр δ и равномерное пространственное распределение с количеством звезд λ на единицу объема. Показать, что при $R \to \infty$ любой участок неба будет полностью светящимся.

Примечание. В действительности такое не наблюдается, поскольку в связи с конечным возрастом Вселенной $t = 14 \cdot 10^9$лет ее наблюдаемый радиус ct конечен.

Источник: М. Кендалл, П. Моран, Геометрические вероятности.

https://docs.google.com/open?id=0B1ptvF0qUV6hRUVlZlJCaTZWdms

5 Формула Крофтона

Пусть N точек независимо распределены в области D n-мерного пространства, P - вероятность того, что фигура F, образованная N точками, обладает определенным свойством, определяемым так, что оно зависит только от взаимного расположения точек, $V = m(D)$ - лебегова мера области D, P_1 - вероятность того, что F обладает требуемым свойством для случайных точек в области $D1 \supset D$. Тогда для малых приращений δV

$$\delta P = N\left(P_1 - P\right)V^{-1}\delta V$$

Источник: М. Кендалл, П. Моран, Геометрические вероятности.
https://docs.google.com/open?id=0B1ptvF0qUV6hRUVlZlJCaTZWdms

6 Случайные вращения

Показать, что случайное вращение вектора в n-мерном пространстве пространстве эквивалентно действию на него линейного оператора, задаваемого случайной матрицей $A \in SO\left(n\right)$: $\omega \in SO\left(n\right)$ случайные матрицы A и $\omega^T A \omega$ имеют одинаковую функцию распределения.

7 Теорема Дворецкого

Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ существует $N = N\left(k, \varepsilon\right) < exp\left(C\frac{\log 1\varepsilon}{\varepsilon^2}k\right)$, такое, что любое конечномерное банахово пространство $\left(x, ||.||\right)$, такое, что $\dim X > N$, существует k-мерное подпространство E, являющееся ε-евклидовым, т.е. в нем существует такая евклидова норма $|.|$, что $||x|| \leq |x| \leq \left(1+\varepsilon\right)||x||$ для всех $x \in E$.

Источник: В. Д. Мильман, Новое доказательство теоремы А. Дворецкого о сечениях выпуклых тел, Функциональный анализ и его приложения, т.5, вып.4, 1971

http://www.mathnet.ru/links/1aa4d451927dd19a0bd844b8c7b42b7c/faa2613.pdf

8 Броуновское движение

Рассмотрим двумерное броуновское движение $X = \left(X_1\left(t\right), X_2\left(t\right)\right)$ на $\mathbb{R}^2$, $X\left(0\right) = 0$. Пусть $S\left(t\right)$ – случайная площадь, заключенная между броуновской траекторией и отрезком, соединяющим ее начальную и конечную точки. Доказать, что для $S\left(t\right)$ имеет место равенство $E\left(e^{i\xi S(t)}\right) = \frac{1}{\cosh\frac{\xi t}{2}}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Указаниие: см. Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, глава VI

Источник: Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, глава VI,
https://docs.google.com/open?id=0B1ptvF0qUV6hWWE2VlZYQlRmYms

9 Дискретные случайные блуждания Орнштейна-Уленбека

Пусть $X = \{-N, -N+1, ..., N-1, N\}$*, и на этом множестве заданы случайные блуждания с вероятностями перехода*

$$p(k,k) = 1/2,\ p(k,k+1) = 1/4 - k/4N,\ p(k,k-1) = 1/4 + k/4N.$$

Найти кривизну Риччи $\kappa(x,y)$*, где* x *и* y *– произвольные две соседние точки.*

Указазание: см. Yann Ollivier, Ricci curvature of Markov chains on metric spaces

Источник: Yann Ollivier, Ricci curvature of Markov chains on metric spaces,
http://www.yann-ollivier.org/rech/publs/curvmarkov.pdf