Задачи на применение вероятностных методов в теории чисел.

Задание составила Щедрина Дарья.

Задача 1

Найдите вероятность того, что 2 числа, произвольно взятых из множества {1, 2, ... n} окажутся взаимно простыми. Что происходит при $n \to \infty$?

Задача 2

Формула Стирлинга:

Докажите, что

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n.$$

Указание: примените ЦПТ к последовательности независимых, одинаково распределенных случайных величин с плотностью $I_{t>0}e^{-t}dt$.

Задача 3

Приближения действительных чисел:

$\alpha \in [0,1]$ назовем нормально приближаемым, если $\exists c, \varepsilon > 0$ и выполняется $\forall q \in \mathbb{N}\ min_{p\in\mathbb{Z}}|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}$. Докажите, что множество нормально приближаемых чисел имеет меру 1.

Указание: воспользуйтесь следующей леммой:

$A_q = \{\alpha \in [0,1] |\ min_{p\in\mathbb{Z}}|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}\}$

тогда $\mu\{\overline{lim}A_q = 0\}$.(Ее нужно доказать, или разобрать доказательство).

Задача 4

Вероятностное доказательство Формулы Эйлера: X - случайная величина с распределением:

$$P(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)n^s};$$

$1 < p_1 < p_2 ...$ - простые числа $A_k = \{p_k | X\}$;

1) Найдите $P(A_k)$;

2) Докажите, что A_k независимы;

3) Докажите, что $\zeta(s) = \prod(1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$.

Задача 5

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Докажите, что при $l > 0$

$$M(|\zeta(\sigma+i\tau)|^l) = M(\frac{1}{\zeta(\sigma+i\tau)^{l-2}})\zeta^{l-1}(2\sigma);$$

Здесь $M(f(t)) = lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt$ - среднее значение $M(f(t))$.

Подробнее см. в книге М. Кац "Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел"глава 3 п.5.

Задача 6

Обозначим $\sigma(n)$ - сумма всех делителей n.

а)Докажите, что $M(\frac{\sigma(n)}{n}) = \frac{\pi^2}{6}$;

Указание: Пусть $n = \prod p^{\alpha_p}$ докажите, что

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \prod(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}...+\frac{1}{p^{\alpha_p}})$$

Затем докажите, что $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{k|n}\frac{1}{k}$;

б) Обозначим $\varphi(n)$ - функция Эйлера (мультипликативная функция, которая выражает количество чисел меньших n, и взаимно простых с n подробнее см. И. М. Виноградов "Основы теории чисел"ст. гл. 2 параграф 4);

Докажите, что $M(\frac{\varphi(n)}{n}) = \frac{6}{\pi^2}$;

Указание: докажите, что$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$;

в) Обозначим $d(n)$ - число делителей n и $\nu(n)$ - число простых делителей n.

Докажите, что $M(\frac{d(n)}{2^{\nu(n)}}) = \prod_p(1+\frac{1}{2p(p-1)}) < \infty$;

Указание: докажите, что $d(n) = \prod_p(\alpha_p(n)+1)$;

Здесь $M(f(n)) = lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n)$.

Подробнее в "Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел"глава 4.

Задача 7

Теорема Харди - Рамануджана. Обозначим $\omega(n)$ - число различных простых делителей n.

Докажите, что существуют константы c_1 c_2 что количество натуральных m меньших n, число простых делителей которых равно k

$$N_n(\omega(m)=k) < \frac{c_1 n(ln(lnn)+c_2)^{k-1}}{(k-1)!lnn};$$

Указание: 1) Докажите, что $\sum_{m=1}^{n}(\omega(m)-ln(lnn))^2 = Bn(ln(lnn))$;

2)Выведите отсюда, что для любой положительной неограниченно возрастающей при $n\to\infty$ функции $\psi(n)$ выполнено$\psi^2(n)ln(lnn)N_n(|\omega(m)-ln(lnn)| > \psi(n)\sqrt{ln(lnn)}) = Bn(ln(lnn))$.

Подробнее P.Turan "On a theorem of Hardy and Ramanujan"J.London Math. Soc. 1934, 9, 274-276

Задача 8

$\nu_n = \frac{N_n}{n}$. Здесь, как и в предыдущей задаче $N_n(...)$ - количество чисел меньших n и удовлетворяющих условию в скобках.

$p_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Докажите, что $\nu_n(\frac{\omega(m) - ln(lnn)}{\sqrt{ln(lnn)}} < 0) \sim \frac{1}{lnn} \sum \frac{(ln(lnn))^{k-1}}{(k-1)!} \sim \int_{-\infty}^{0} p_G(u)du$ где суммирование берется по всем $k < ln(lnn) + x\sqrt{ln(lnn)}$

Указание: Из предыдущей задачи следует, что при $(1 + o(1))ln(lnn) < x < cln(lnn)$

$$\nu_n(\omega(m) < x) \sim \frac{1}{lnn} \sum_{1 \le k < x} \frac{(ln(lnn))^{k-1}}{(k-1)!}$$

Дальше воспользуйтесь ЦПТ для суммы независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметром $ln(lnn)$.

Задача верна при всех x, но можно доказать только при $x = 0$.

Задача 9

$\nu(n)$ - число простых делителей n.

Докажите, что среднее значение $\nu(n)$ на отрезке $[1...N]$ равно $ln(lnN) + B + O(\frac{1}{lnN})$.

Реклама: константа B совпадает с константой в формуле: $\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = ln(lnx) + B + O(\frac{1}{lnx})$.

Подробнее в книге Бухштаб А. А. "Теория чисел"глава 35.

Задача 10

Докажите, что множество простых чисел p, для которых $g = 2$ - первообразный корень (элемент в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ порядка $p-1$ подробнее см. И. М. Виноградов "Основы теории чисел"глава 6.) имеет положительную плотность. Решение этой задачи не известно.

Литература:

Й. Кубилюс "Вероятностные методы в теории чисел";

М. Кац "Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел";

Бухштаб А. А. "Теория чисел".