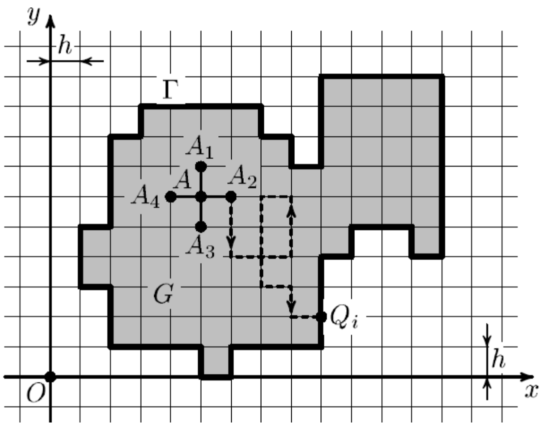
1. ***Задача о тасовании карт (семинар от 17.03)***
Рассмотрим колоду карт, пронумерованных *1, 2, ..., 52*. Процесс тасования происходит следующим образом: мы снимаем верхнюю карту и помещаем ее случайным образом равномерно на одну из возможных позиций, т.е. либо вновь на верхнюю позицию, либо под колоду, либо на одну из позиций между другими картами.
   a) Как долго в среднем будет продолжаться процесс тасования до того момента, пока самая нижняя карта не окажется сверху?
   Указание: оцените среднее время нахождения карты на некоторой фиксированной позиции в колоде.
   b) Пусть p_n – вероятность того, что после n итераций карты окажутся расположенными в возрастающем порядке. Покажите, что независимо от начального порядка карт $\exists \lim_{n\to\infty} p_n = p < +\infty$, вычислите p.
   Указание: докажите, что процесс тасования - апериодическая и неразложимая марковская цепь, затем воспользуйтесь теоремой о том, что для неприводимой апериодической цепи Маркова (X_n) со стационарным распределением $\pi = (\pi_i)$ выполняется соотношение $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j$.
   c) Покажите, что, по крайней мере до того момента, пока нижняя карта не достигнет верхней позиции, порядок карт, которые будут располагаться под ней, является равномерно случайным.

2. ***Блуждание пьяницы (лекция от 24.03)***
Представим, что G – город, улицами которого являются линии сетки (см. рис). Вокруг города, вдоль границы Γ, вырыта глубокая канава. В начальный момент времени на произвольном перекресте A города находится пьяница. Он начинает движение в произвольном направлении (т.е. выбор направления с вероятностью $p = 1/4$). На каждом следующем перекрестке он так же выбирает направление случайным образом ($p = 1/4$), не зависимо от того, как двигался раньше. Блуждая по городу, он в некоторый момент времени выходит на границу (попадает в $Q_i \in \Gamma$) и падает в канаву. Тут к нему подбегает милиционер и требует штраф в размере $f(Q_i)$. Пусть $v(A)$ – средняя величина штрафа при условии, что пьяница стартовал из точки А. Покажите, что $\forall A \in G\backslash\Gamma$ верно равенство $v(A) = 1/4\sum_{i=1}^{4} v(A_i)$.
Указание: Воспользуйтесь методом Монте-Карло. Рассмотрите $N \gg 1$ запусков процесса из точки A.



Подробнее об этой задаче можно почитать в книге Сосинского А. Б. «Мыльные пленки и случайные блуждания» http://www.mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.6.pdf

3. ***Задача о хроматическом числе графа (семинар от 14.04)***
Пусть K_n – полный граф (или подграф). Определим $\forall$ пары $s, t \in N$ число Рамсея как $R(s,t) = \min_{n\in N}\{\forall$раскраски ребер K_n в красный или синий цвета $\exists$ либо $K_s \in K_n$, у которого все ребра красные, либо $K_t \in K_n$, у которого все ребра синие$\}$.
$R(s,s)$ – диагональное число Рамсея.
Доказать, что если n и s таковы, что $C_n^s 2^{1-C_s^2} < 1$, то $R(s,s) > n$. Другими словами, не существует полного n-вершинного графа, в котором найдется полный s-вершинный подграф, удовлетворяющий указанным свойствам.
Указание: необходимо показать, что в таком случае вероятность существования хотя бы одного хроматичексого подграфа K_s: $P(\exists K_s \in K_n) < 1$.

4. ***Неравенство Чернова vs. неравенство Маркова (лекция от 21.04)***
Неравенство Маркова: $\forall X > 0$: $P(X > t) \leq \frac{EX}{t}$
Для функции $\phi(x)$: $\forall x\ \phi(x) > 0, \phi'(x) > 0$ верно $\mathrm{P}(\phi(\mathrm{X}) > \phi(\mathrm{t})) \leq \frac{\mathrm{E}[\phi(\mathrm{X})]}{\phi(\mathrm{t})}$.
Показать, что $\forall t > 0 \to P(X > t) \leq \min_{q>0} E\left(\frac{x}{t}\right)^q \leq \min_{s>0} E(e^{s-t})$. То есть неравенство Маркова всегда дает более точную оценку, чем неравенство Чернова.

5. ***Неравенство Бернштейна (лекция от 21.04)***
   a) Пусть $\{X_i\}_{i=1}^N$ – независимые в совокупности, одинаково распределенные случайные величины. Причем $DX_i = \sigma^2,\ EX_i = 0$.
   Доказать, что $\forall \epsilon > 0 \to P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \geq \epsilon\right) \leq \exp\{-\frac{n\epsilon^2}{2\sigma^2 + \frac{2}{3}c\epsilon}\}$.

   Указание:

   1. Определим $F_i = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{s^{r-2} E X_i^r}{r! \sigma_i^2}$;
   2. Заметим, что $Ee^{sX_i} = 1 + sEX_i + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{s^r EX_i^r}{r!} = 1 + s^2\sigma_i^2 F_i \leq e^{s^2\sigma_i^2 F_i}$;
   3. Предположим, что X_i – ограничено, т.е. $|X_i| \leq c$, тогда $EX_i^r \leq c^{r-2}\sigma_i^2$;
   4. Сделайте оценку F_i сверху и получите оценку сверху мат. ожидания Ee^{sX_i}
   5. Воспользуйтесь неравенством Чернова и получите оценку
   $P(\sum_{i=1}^n X_i > \epsilon) \leq \exp\{\frac{n\sigma^2(e^{sc} - 1 - sc)}{c^2} - s\epsilon\}$;
   6. Минимизируя правую часть неравенства по всем $s \geq 0$, получите искомую оценку.

   b) Покажите, что н-во Бернштейна является почти таким же точным, как оценка, полученная с помощью ЦПТ, без контроля скорости сходимости в ЦПТ:
   $P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - EX_i \geq \epsilon\right) \approx \exp\{-\frac{n\epsilon^2}{2\sigma^2}\}$.

6. ***Сложность в среднем (семинар от 14.04)***
Пусть $t(X)$ – время работы алгоритма A на входных данных X, $X \sim F(x)$.
   1. Время работы алгоритма в среднем определим как $E[t(X)] = \int_X t(x)dF(x)$.
   2. Эффективный в среднем алгоритм: $E[t(X)] = O(poly(|X|))$;

Рассмотрим задачу SUBSET SUM. Пусть $\{a_1, \dots, a_n\}$ – набор независимых в совокупности, одинаково распределенных случайных величин, то есть: $\forall i$: $a_i \sim F(x),\ a_i > 0$, причем a_i -

натуральное. Пусть задано некоторое целое $b > 0$. Алгоритм A подбирает такое подмножество элементов $S \in \{1, \dots, n\}$, что $\sum_{j \in S} a_j$ = b. Оказывается, что существование эффективного в среднем алгоритма A зависит от того, по какому закону $F(x)$ распределены a_i. Если в качестве $F(x)$ рассматривать равномерное распределение на отрезке $[0, N]$, то на существование такого A влияет выбор правой границы N. Предложить варианты значений N, при которых:

1. существует эффективный в среднем алгоритм A;
2. эффективного в среднем алгоритма A не существует.
3. (не обязательный пункт) предложить другой вариант $F(x)$, при котором эффективного в среднем A не существует.

Замечания

К задаче 1. Задача разобрана в книге Кёльберта и Сухова «Вероятность и статистика в примерах и задачах» т. 2. стр 47. О том, как оценивать время, необходимое для того, чтобы колода оказалась перетасованной можно посмотреть в лекции А. Ю. Окунькова «Легко ли заблудиться в группе?» http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=3491 .

К задаче 2. Существует связь между случайным блужданием и проблемой Дирихле.

Сначала напомним формулировку задачи Дирихле: необходимо найти гармоническую в области D функцию, принимающую на границе D заданные значения:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 \ \forall x \in D \\ u(x) = f(x) \ \forall x \in \partial D \end{cases}$$

Для решения её дискретного приближения (когда область D задана сеткой) используются случайные блуждания: в двумерном случае условие $\Delta u(x) = 0$ заменяется на $u(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} u(x_i)$, где x_i – узлы сетки, смежные с узлом x. Значением u в точке x и будет являться мат. ожидание штрафа, заплаченного пьяницей, стартовавшего из точки x при пересечении границы. Подробней об этой задаче и её обобщении на нелинейный случай $\Delta u(x) = \psi(u)$ можно прочесть в докладе Е.Б. Дынкина «Теория вероятностей и анализ», например http://www.mccme.ru/free-books/globus/globus4.pdf, стр 209-220.

К задаче 3. Эта и ряд похожих задач разобраны в книге А.М. Райгородского «Вероятность и алгебра в комбинаторике».

К задаче 5. Более полную информацию о неравенствах концентрации меры можно получить в работе Lugosi «Concentration-of-measure inequalities».

К задаче 6. Подробнее о решении этой задачи можно почитать в книге Arora, Barak «Computational Complexity: A Modern Approach» на стр. 269 (ch. 15 Average Case Complexity: Levin’s Theory).