Задачи домашнего экзамена: 27 апреля – 18 мая 2012 года.

Через D обозначена алгебра $\mathbb{C}[x, \partial_x]$; $B_n :=\mathrm{span}\langle x^i \partial_x^j \rangle_{i+j \leq n}$.

Задача 1. Пусть на D-модуле M задана исчерпывающая фильтрация $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ такая, что
1) $B_n M_i \subset M_{i+n}$ для всяких i, n,
2) для каких-то $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и всякого $n \geq 0$ верно, что $\dim M_n \leq c_1 n + c_2$.
Покажите, что тогда модуль M конечнопорождён, голономен и $|\mathrm{V}(M)| \leq c_1$.

Задача 2. Пусть $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ — ненулевой многочлен. Покажите, что существует дифференциальный оператор $D(x, \lambda)$, с полиномиальными по λ и x коэффициентами, и приведённый многочлен $b(\lambda)$, для которых

$$D(x, \lambda) p^\lambda = b(\lambda) p^{\lambda - 1}.$$

Такой многочлен $b(\lambda)$ наименьшей ненулевой степени называется *полиномом Бернштейна* многочлена $p(x)$.

Задача 3. Найдите полином Бернштейна для $p(x) = x, x^2, x^2 - 1$.

Пусть M_1, M_2 — два произвольных голономных D-модуля. Пространство

$$M_1 \otimes_{\mathbb{C}[x]} M_2.$$

имеет естественную структуру $\mathbb{C}[x]$-модуля и наделяется структурой D-модуля с помощью правила Лейбница.

$$\partial_x(m_1 \otimes m_2) = (\partial_x m_1) \otimes m_2 + m_1 \otimes (\partial_x m_2).$$

Задача 4. Проверьте, используя задачу 1 (можно её не доказывать!!!), что $M_1 \otimes_{\mathbb{C}[x]} M_2$ — конечнопорождённый голономный D-модуль.

Задача 5. Пусть M — простой $\mathbb{C}[x, \frac{1}{x}, \partial_x]$-модуль. Покажите, что M конечнопорождён и голономен как $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль.

Для всякого $b \in D$ положим $D/b := D/(\cdot b)$.

Задача 6. Пусть $B_n :=\mathrm{span}\{x^i \partial_x^j\}_{i+j \leq n}$ и $b \in B_n$ — общий элемент, $D/b := D/(\cdot b)$.
а) Какие особые точки имеет D-модуль D/b?
б) Какова диаграмма Ньютона D/b в этих точках? Каковы её изломы?
в) Опишите соответствующие $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}}]$-модули.

Задача 7. Изоморфны ли D-модули D/b и D/b' для общих $b, b' \in B_n$?

Задача 8. Пусть M_1, M_2 — два $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}}]$-модуля, конечномерных как $\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}}]$-модули. Как по главным частям M_1, M_2 найти главные части $M_1 \otimes_{\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})} M_2$?

Задача 9. Пусть M_1, M_2 — два D-модуля с регулярными особенностями. Покажите, что $M_1 \otimes_{\mathbb{C}[x]} M_2$ также является D-модулем с регулярными особенностями.

Задача 10. Покажите, что когомологии чеха $\mathrm{H}^i(U, \mathcal{O}_U)$ пучка регулярных функций $\mathcal{O}_U$ на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{C}^n$ являются голономными $D(\mathbb{C}^n)$-модулями с регулярными особенностями, носители которых сосредоточены вне U.

Удачи!

P.S. В решении задач существенную помощь может оказать как материал лекций, так и книжка Coutinho «A primer of algebraic D-modules».