Тема лекции --- независимость утверждений от систем аксиом.

Известный классический пример независимости утверждения от аксиом --- пятый постулат Евклида. После долгого изучения оказалось, что если добавить к аксиоматике (состоящей, разумеется, не только из четырёх других постулатов, но и из всех десятков определений и аксиом, упомянутых в ``Началах'', а также из пары десятков аксиом работы с длинами --- то есть, фактически, с числами) пятый постулат или его отрицание, то получатся одинаково непротиворечивые аксиоматики. Для их непротиворечивости достаточно, например, просто непротиворечивости теории действительных чисел. Таким образом, пятый постулат оказался независим от остальных аксиом геометрии, то есть недоказуем и неопровержим.

Классические примеры независимости, ассоциирующиеся с логикой относятся к теории множеств.

Если взять теорию множеств и аксиоматику ZF, то в ней нельзя ни доказать, ни опровергнуть аксиому выбора. Аксиома выбора утверждает, что декартово произведение любого набора непустых множеств не пусто. Что то же самое, она утверждает, что если A --- множество непустых непересекающихся множеств, то существует такое множество B, что B пересекается с каждым элементом A ровно по одному элементу.

Из аксиомы выбора также следует лемма Цорна: если в некотором частично упорядоченном множестве для любой цепи (линейно упорядоченного подмножества, то есть подмножества, в котором сравнимы любые два элемента) есть верхняя граница (то есть элемент множества, больший либо равный любому элементу цепи), то существует хотя бы один максимальный элемент во множестве, то есть элемент, который не меньше никакого другого элемента множества, хотя и может быть несравним со многими из них.

Теорема о том, что в любом векторном пространстве есть базис следует из леммы Цорна. Доказательство можно посмотреть в учебнике Верещагина и Шеня по теории множеств, раздел 2.8 (разделы 2.3--2.8 посвящены вопросам порядка на множествах, которые существенно опираются на аксиому выбора).

С другой стороны, можно было бы взять аксиому измеримости. Она утверждает, что на плоскости (в $\mathbb{R}^2$) существует понятие площади, которое не меняется при движениях и выдерживает суммирование по счётной последовательности непересекающихся фигур. Добавление этой аксиомы в ZF даёт столь же непротиворечивую систему, что и ZF или ZFC, но она противоречит аксиоме выбора. Действительно, возьмём единичный квадрат, объявим эквивалентными точки, которые можно соединить рациональным вектором, и возьмём по представителю из каждого класса. Рациональные сдвиги полученного множества на расстояние не больше 2 покроют единичный квадрат, но не выйдут из круга радиуса 4. Но счётная сумма одинаковых слагаемых, равных площади нашего разреженного множества равна либо 0, либо ∞, что не лежит между 1 и 100.

Таким образом, аксиома выбора и аксиома измеримости достаточно естественны, но противоречат друг другу. Исторически аксиома выбора стала широко используемой раньше.

Некоторые примеры недоказуемых утверждений дают вычислительные модели. Например, существует программа, которая никогда не заканчивает работу, это недоказуемо в арифметике Пеано и при этом нельзя даже ни про какое натуральное число доказать, что она его не возвращает. Действительно, напишем интерпретатор любого языка программирования с функциями GetProgramText и Eval. Путь программа выясняет свой текст и начинает доказывать в PA всё, что доказуемо (перебором). Как только она докажет, что она не может вернуть конкретное натуральное число, она его немедленно печатает, вопреки предсказаниям PA. Если PA непротиворечива, программа не сможет ни про какое число доказать, что она его не может напечатать, что и требовалось.

Мы, конечно, смогли доказать, что программа ничего не печатает, но мы использовали не только аксиомы PA, но и непротиворечивость PA.

Некоторые задачи позволяют скрыть, что речь про вычислительную модель. Например, пусть у нас есть квадратные плитки, про которые известно, где у них верх, а где низ. Пусть их стороны раскрашены и можно прикладывать плитки только сторонами одного цвета. Можно ли, зная набор типов плиток, доказать, что ими можно или нельзя замостить всю плоскость, начиная с заданной стартовой плитки?

Оказывается, что если взять любую локально проверяемую структуру на плоскости (например, протокол работы машины Тьюринга, в котором в каждой строчке каждая клетка зависит только от трёх клеток строчкой ниже), можно сказать, что типы плиток соответствуют разрешённым кускам достаточно большого размера (скажем, девять на девять), а цвета на каждой стороне должны полностью кодировать содержимое пересечения областей видимости для двух плиток, касающихся по этой стороне. Тогда замощения и корректные структуры будут во взаимно-однозначном соответствии; а так как доказать бесконечность протокола работы машины Тьюринга можно не всегда, то и возможность замостить плоскость недоказуема.