Когомологии групп: H^0 и H^1

Задача 1. Пусть G — конечная группа и M — G-модуль.

a) Докажите, что, если $|G| = n$, то каждый элемент из $H^1(G, M)$ обращается в ноль при умножении на n.

b) Докажите, что, если M конечно порожден как G-модуль, то $H^1(G, M)$ конечна.

Задача 2°. Пусть G — конечная группа, M — G-модуль, и H — нормальная подгруппа в G.

a) Покажите, что существует естественное действие G/H на $H^1(H, M)$.

b) Докажите, что образ отображения ограничения $Res\colon H^1(G, M) \to H^1(H, M)$ лежит в подгруппе $H^1(H, M)$, неподвижной относительно G/H. Это позволяет получить следующую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow H^1(G/H, M^H) \xrightarrow{Inf} H^1(G, M) \xrightarrow{Res} H^1(H, M)^{G/H}.$$

Эта точная последовательность является частью спектральной последовательности Серра–Хохшильда для групп когомологий.

Задача 3°. a) Пусть G — конечная группа, M — G-модуль, и пусть H_1, H_2 — подгруппы в G. Предположим, что H_1 и H_2 сопряжены, то есть $H_1 = \sigma H_2 \sigma^{-1}$ для какого-то $\sigma \in G$. Докажите, что отображения ограничения $Res\colon H^1(G, M) \longrightarrow H^1(H_1, M)$ и $Res\colon H^1(G, M) \longrightarrow H^1(H_2, M)$ имеют одинаковое ядро.

b) Убедитесь, что группы Зельмера и Тейта–Шафаревича не зависят от выбора вложений $\bar{K} \hookrightarrow \bar{K}_v$.

Задача 4° (группы когомологий и полупрямые произведения). Пусть G — конечная группа, M — G-модуль. Полупрямое произведение M и G, обозначаемое $M \ltimes G$, является группой, которая как множество есть $M \times G$ с групповым законом $(m_1, \sigma_1) \cdot (m_2, \sigma_2) = (m_1 + m_2^{\sigma_1}, \sigma_1\sigma_2)$. Покажите, что группа всех автоморфизмов $M \ltimes G$, индуцирующих тождественные автоморфизмы на M, изоморфна группе 1-коциклов из G в M. При этом внутренние автоморфизмы $M \ltimes G$, индуцированные элементами M, (т.е. автоморфизмы вида $(m', \sigma) \mapsto (m, 1) \cdot (m', \sigma) \cdot (m, 1)^{-1}$) соответствуют 1-кограницам.

Задача 5°. Пусть $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) = G_K$ и M — дискретный G-модуль. Покажите, что

$$H^1(G, M) = \varinjlim H^1(\mathrm{Gal}(L/K), M^{G_L}),$$

где инъективный предел берется по всем конечным расширениям L/K, а группы когомологий связаны для разных L отображениями инфляции.

Подсказка: воспользуйтесь компактностью G, чтобы при заданном непрерывном коцикле установить наличие такой подгруппы H конечного индекса в G, что на классах смежности G/H коцикл постоянен.

Задача 6 (теорема Гильберта 90 и теория Куммера). a) Пусть L/K — конечное расширение Галуа с группой Галуа G. Покажите, что $H^1(G, K^\times) = 1$.

Подсказка: для коцикла $\{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in G}$ рассмотрите элементы вида $\sum\limits_{\sigma \in G} \alpha_\sigma \sigma(\theta)$ и воспользуйтесь линейной независимостью характеров.

b) Убедитесь, что $H^1(G, K) = 0$ (K рассматривается как группа по сложению).

Подсказка: аналогично предыдущему пункту рассмотрите элемент $\frac{1}{\mathrm{Tr}(\theta)} \sum\limits_{\sigma \in G} \alpha_\sigma \sigma(\theta)$.

c) Пусть L/K — конечное циклическое расширение, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ — образующая, $\beta \in L$. Покажите, что $N_{L/K}(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда найдется такой $\alpha \in L^\times$, что

$\beta = \alpha/\sigma\alpha$. Аналогично, $\mathrm{Tr}_{L/K}(\beta) = 0$ тогда и только тогда, когда найдется такой $\alpha \in L$, что $\beta = \alpha - \sigma\alpha$.

d) Предположим, что характеристика поля K взаимно проста с n и K содержит множество μ_n корней степени n из 1. Покажите, что $\mathrm{Hom}(G_K, \mu_n) \cong K^\times/(K^\times)^n$.

e) Выведите из предыдущего пункта, что конечные абелевы расширения K показателя, делящего n, взаимно однозначно соответствуют конечным подгруппам $K^\times/(K^\times)^n$. При этом циклические расширения K порядка, делящего n, взаимно однозначно соответствуют элементам $K^\times/(K^\times)^n$ так, что расширение, соответствующее элементу $a \in K^\times$, есть $K(\sqrt[n]{a})$.

f^*) Каков аналог предыдущих двух пунктов, если $(\mathrm{char}\, K, n) \neq 1$.

Подсказка: в случае $n = p$ достаточно рассмотреть расширения Артина–Шрайера (поля разложения $x^p - x - a$). Для $m = p^l$ понадобятся вектора Витта.

Задача 7 (когомологии неабелевых групп). Пусть G действует на неабелевой группе M. Положим $H^0(G, M) = M^G$. Назовем 1-коциклом G такое отображение $\xi\colon G \to M$, что $\xi_{\sigma\tau} = (\xi_\sigma)^\tau \xi_\tau$. Скажем, что два коцикла ξ и ζ когомологичны, если найдётся такой элемент $m \in M$, что $m^\sigma \xi_\sigma = \zeta_\sigma m$ для всех $\sigma \in G$. Назовём $H^1(G, M)$ множество коциклов, факторизованное по отношению когомологичности. $H^1(G, M)$ является *пунктированным множеством* (т. е. множеством с выделенной точкой). Аналогично определяется H^1 для дискретного действия $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) = G_K$ на группе M.

a) Покажите, что стандартные точные последовательности (длинная точная последовательность, ограничение—инфляция) имеются и в случае неабелевой группы M.

b) Докажите, что $H^1(G_K, GL_n(K)) = 1$.