

## Lecture 5. TEXTS ABOUT BASIC MATHEMATICS

С формальной точки зрения современная математика основана на теории множеств (аксиоматика Цермело–Френкеля), а также на логике (исчисления предикатов) и на арифметике (аксиомы Пеано). Однако практика далека от этих оснований, и с языковой точки зрения можно сказать, что современные математические тексты строятся на наивной теории множеств, на "неформальной арифметике" и на "неформальной логике". Настоящая лекция посвящена конструкциям, используемым в этих трех случаях. В конце лекции мы остановимся на союзах и предлогах, с тем, чтобы понять, когда те или иные такие словечки используются в математических текстах.

### §1. Naive set theory

Вот как озвучиваются основные символы теории множеств:

$x \in X \rightarrow x$  BELONGS TO  $X$

$X \ni x \rightarrow X$  CONTAINS THE ELEMENT  $x$

$A \subset B \rightarrow A$  IS CONTAINED IN  $B$

$B \supset A \rightarrow B$  CONTAINS  $A$

$A \cap B = \dots \rightarrow$  THE INTERSECTION OF  $A$  AND  $B$  IS  $\dots$

$A \cup B = \dots \rightarrow$  THE UNION OF  $A$  AND  $B$  IS  $\dots$

$A \sqcup B = \dots \rightarrow$  THE DISJOINT UNION OF  $A$  AND  $B$  IS  $\dots$

$\{x \in X \mid \mathcal{P}(x)\} \rightarrow$  THE SET OF ALL  $x$  IN  $X$  SUCH THAT  $\mathcal{P}(x)$  HOLDS

$\bigcup_{i=1}^n X_i \quad \left( \bigcap_{i=1}^n X_i \right) \rightarrow$  THE UNION (INTERSECTION) OF ALL  $X_i$  FROM 1 TO  $n$

### §2. Informal arithmetic

Здесь под арифметикой мы понимаем не только теорию чисел (т.е. натуральных чисел), но и другие разделы математики, где речь идет о четырех арифметических операциях, как например теорию вещественных чисел или теорию колец, полей и групп. Вот связанные с этим основные термины:

$A + B \rightarrow A$  PLUS  $B$ , SUM OF  $A$  AND  $B$

$A - B \rightarrow A$  MINUS  $B$ , DIFFERENCE BETWEEN  $A$  AND  $B$

$A \times B$  или  $A \cdot B \rightarrow A$  TIMES  $B$ , PRODUCT OF  $A$  AND  $B$

$A = B \rightarrow A$  EQUALS  $B$  или  $A$  IS EQUAL TO  $B$

$A/B \rightarrow A$  OVER  $B$ , RATIO OF  $A$  AND  $B$

$(X, Y) \rightarrow$  THE PAIR  $(X, Y)$

$(X_1, \dots, X_n) \rightarrow$  THE  $n$ -TUPLE  $(X_1, \dots, X_n)$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow$  RESIDUES MODULO  $n$

$k \equiv l \pmod{n} \rightarrow$   $k$  EQUALS  $l$  MODULO  $n$

Напомним также, что дробь – это FRACTION, а ее числитель и знаменатель – это NUMERATOR и DENOMINATOR, соответственно. Далее, правая (левая) часть равенства – это RIGHT-HAND (LEFT-HAND) SIDE.

В теории чисел, да и в математике вообще, часто применяется принцип математической индукции. Вот несколько часто используемых при этом штампов.

WE SHALL PROVE [ref] BY INDUCTION ON  $n$

TO ESTABLISH THE BASE OF INDUCTION, WE MUST SHOW THAT [claim]

NOW LET US PERFORM THE INDUCTION STEP

BY THE INDUCTION HYPOTHESIS, WE HAVE [claim]

WE HAVE SHOWN THAT [claim], THEREFORE [ref] FOLLOWS BY INDUCTION.

### §3. Informal logic

Мы уже видели, как читаются те или иные логические символы:

& или  $\wedge$  – AND;  $\vee$  – OR;  $\neg\mathcal{P}$  – NOT  $\mathcal{P}$  или THE NEGATION OF  $\mathcal{P}$ ;

$\rightarrow$  или  $\implies$  – IMPLIES (THAT);  $\forall$  – FOR ALL;  $\exists$  – THERE EXISTS;

При рассуждении от противного используются следующие обороты:

WE ARGUE BY CONTRADICTION; SUPPOSE THAT [claim].

THE PROOF IS BY *REDUCTIO AD ABSURDUM*; SUPPOSE THAT [claim].

ASSUME THE CONVERSE; THEN [claim].

WE HAVE ARRIVED AT A CONTRADICTION; THE [ref] IS PROVED.

A CONTRADICTION; THE [ref] IS PROVED.

Обычный логический прием при доказательствах – разбор случаев – преодолевается с помощью следующих штампов:

LET US CONSIDER SEVERAL CASES. CASE 1 [claim] ... CASE 2 [claim] ...

IN THE PROOF, WE CONSIDER TWO (THREE, FOUR, ...) CASES. ...

В логике, как и во всей математике, можно делать замену переменных; в логике, это одно из правил вывода, которое обозначается специальным символом. В обычной (не формальной) математике, в таких случаях используются следующие штампы.

SUBSTITUTE [obj1] FOR [obj2] IN [ref]

SUBSTITUTING [obj1] FOR [obj2] IN [ref], WE OBTAIN [claim]

REPLACE [obj2] BY [obj1] IN [ref]

REPLACING [obj2] BY [obj1] IN [ref], WE OBTAIN [claim]

Обратите внимание на то, что в первых двух штампах заменяемая переменная [obj2] стоит второй, а заменяющая [obj1] – первой, в то время как в последних штампах – наоборот.

#### **§4. Conjunctions and prepositions**

В конце лекции приводились примеры употребления "связывающих словечек" OF, TO, IN, BY, AS, FOR, WITH, UNDER, FROM и других, выполняющих в английском языке роль падежей, союзов и предлогов в русском. Расширенный список таких выражений появится с конце конспекта следующей лекции.