

Листок 1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ. 13 ФЕВРАЛЯ 2013

*Задача 1.* Докажите, что  $\rho_1(x, y) = \sqrt{\sum(x_i - y_i)^2}$ ,  $\rho_2(x, y) = \max |x_i - y_i|$ ,  $\rho_3(x, y) = \sum |x_i - y_i|$  являются метриками на  $\mathbb{R}^n$ . Нарисуйте единичные шары для этих метрик при  $n = 1, 2, 3$ .

*Задача 2.* Докажите, что открытый шар открыт, а замкнутый шар – замкнут.

*Определение 1.* Точка  $a \in X$  называется предельной точкой множества  $A \subset X$ , если найдется последовательность точек  $A \setminus \{a\}$ , сходящаяся к  $a$ .

*Определение 2.* Замыканием множества  $A$  называется объединение множества  $A$  и множества его предельных точек. Обозначение:  $\bar{A}$ .

*Задача 3.* Докажите, что замыкание замкнуто.

*Определение 3.* Отображение  $f$  метрического пространства  $X$  в метрическое пространство  $Y$  называется непрерывным, если прообраз любого открытого множества открыт.

*Задача 4.* Сформулируйте определение непрерывности отображения в точке. Докажите, что отображение, непрерывное в каждой точке является непрерывным.

*Задача 5.* Композиция непрерывных отображений непрерывна.

*Определение 4.* Метрическое пространство называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

*Задача 6.* Докажите, что

- а) замкнутое подмножество компакта компактно;
- б) компактное подпространство метрического пространства замкнуто;
- в) образ компакта при непрерывном отображении компактен.

*Задача 7.* В  $\mathbb{R}^n$  компактность равносильна замкнутости и ограниченности.

*Задача 8.* Докажите, что в компакте

- а) из любой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность;
- б) всякая последовательность вложенных замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

*Задача 9.* Докажите, что метрики  $\rho_1(x, y) = \sqrt{\sum(x_i - y_i)^2}$ ,  $\rho_2(x, y) = \max |x_i - y_i|$ ,  $\rho_3 = \sum |x_i - y_i|$  определяют одну и ту же топологию на  $\mathbb{R}^n$ .

*Задача 10.* Пусть  $f: X \rightarrow Y$  непрерывное отображение между топологическими пространствами. Верно ли, что если  $f$  взаимно-однозначно, то  $f^{-1}$  непрерывно?

*Задача 11.* Докажите, что отрезок, интервал, полуинтервал и плоскость попарно негомеоморфны.

*Определение 5.* Топологическое пространство называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. Топологическое пространство называется связным, если оно не является несвязным. Топологическое пространство  $X$  называется линейно связным, если для любых  $a, b \in X$  найдется непрерывное отображение  $f: [0, 1] \rightarrow X$ , такое что  $f(0) = a$ ,  $f(1) = b$ .

*Задача 12.* Докажите, что линейно связное топологическое пространство связно.

*Задача 13.* Докажите, что образ (линейно) связного пространства при непрерывном отображении является (линейно) связным.

*Задача 14.* Докажите, что связное открытое подмножество  $\mathbb{R}^n$  является линейно связным.

*Задача 15.* Является ли замыкание (в плоскости) графика функции  $\sin \frac{1}{x}$  связным? линейно связным?