

Листок 4. 6 марта 2013

Задача 1. Пусть пространство X линейно связно и односвязно. Докажите, что любое отображение окружности в X гомотопно отображению в точку.

Задача 2. Пусть пространство X линейно связно и односвязно. Докажите, что любые пути в X с совпадающими концами гомотопны в классе путей с закрепленными концами.

Задача 3. Пусть X одномерный клеточный комплекс, a – его замкнутая одномерная клетка, граница которой состоит из двух точек. Докажите, что естественное отображение $X \rightarrow X/a$ является гомотопической эквивалентностью.

Задача 4. Докажите, что одномерный связный конечный клеточный комплекс гомотопически эквивалентен букету из $1 - \chi(X)$ окружностей.

Задача 5. Докажите, что сфера с двумя отождествленными точками гомотопически эквивалентна букету сферы и окружности.

Задача 6. Докажите, что свободные группы с разным числом образующих не изоморфны.

Задача 7. Найдите пространства (конечные клеточные комплексы), которым гомотопически эквивалентны дополнение до точки а) в вещественном (комплексном) проективном пространстве; б) в двумерном торе; в) в бутылке Клейна.

Задача 8. Может ли букет из k окружностей ($k \geq 2$) покрывать букет из двух окружностей.

Задача 9. Придумать накрытие, при котором некоторая петля в базе поднимается до замкнутого и до разомкнутого пути в пространстве накрытия.

Задача 10. Приведите пример конечного неодносвязного пространства.

Задача 11. Фундаментальная группа топологической группы абелева.