Листок 6. 3 апреля 2013

Задача 1. Докажите, что $\pi_n(X \times Y, (a, b)) = \pi_n(X, a) \times \pi_n(Y, b)$.

Задача 2. Докажите, что отображение $f_0(D^n, \partial D^n, z_0) \to (X, Y, x_0)$ гомотопно в классе отображений троек отображению в точку x_0 если и только если существует гомотопия $f_t(D^n, \partial D^n, z_0) \to (X, Y, x_0)$, такая что $f_1(D^n) \subset Y$ и f_t неподвижна на $S^{n-1} = \partial D^n$ (т.е. $f_t(x) = f_0(x)$ при всех $x \in S^{n-1}$).

Задача 3. Докажите, что гомотопическая последовательность пары точна.

Задача 4. Докажите, что $\pi_n(CX, X, x_0) = \pi_{n-1}(X, x_0)$.

Задача 5. Докажите, что относительные гомотопические группы $\pi_n(X, A, x_0)$ коммутативны при $n \geq 3$.

Задача 6. Если Y стягиваемо по X в точку, то гомоморфизмы точной гомотопической последовательности пары обладают следующими свойствами:
а) $j_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(X, Y)$ – мономорфизм;
б) $\partial\colon \pi_n(X, Y) \to \pi_{n-1}(Y)$ – эпиморфизм;
в) $i_*\colon \pi_n(Y) \to \pi_n(X)$ есть нулевой гомоморфизм и $\pi_n(X, Y) = \pi_n(X) \oplus \pi_{n-1}(Y)$.

Задача 7. Рассмотрите точную гомотопическую последовательность пары (X, Y), где Y есть ретракт X. Переставьте заключения пунктов предыдущей задачи так, чтобы получились верные утверждения и докажите их.

Задача 8. Пусть (X, A, B) – тройка пространств (т.е. $X \supset A \supset B$) с отмеченной точкой $x_0 \in B$. Докажите точность гомотопической последовательности тройки:

$$\to \pi_n(A, B, x_0) \to \pi_n(X, B, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, B, x_0) \to,$$

в которой связывающий гомоморфизм $\pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, B, x_0)$ определен как композиция гомоморфизмов $\pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(A, x_0)$ и $\pi_n(A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, B, x_0)$ из соответствующих гомотопических последовательностей пар, а остальные гомоморфизмы индуцированы естественными включениями.

Задача 9. Рассмотрим коммутативную диаграмму абелевых групп

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle g}\big\downarrow & & {\scriptstyle h}\big\downarrow & & {\scriptstyle i}\big\downarrow & & {\scriptstyle j}\big\downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E', \end{array}$$

в которой строчки точны (т.е. ядро последующего гомоморфизма совпадает с образом предыдущего), g, i изоморфизмы, f сюрьективно и j инъективно. Покажите, что h является изоморфизмом.