Теорема Лагранжа

Задача 1.0. Опишите все подгруппы (с точностью до изоморфизма) группы а) S_3; б) S_4 и отношения включения между ними.

Задача 1.1. Пусть m — делитель порядка конечной группы G. Обязательно ли у G есть m-элементная подгруппа?

Задача 1.2. Пусть p — простой делитель порядка конечной группы G. Тогда в группе G есть элемент порядка p.

Указание. Количества элементах в множествах $\{x \in G \mid x^p = e\}$ и $\{(x_1, \ldots, x_p) \in G^p \mid x_1 x_2 \ldots x_p = e\}$ сравнимы по модулю p.

Идеалы

Задача 1.3. Коммутативное кольцо является полем тогда и только тогда, когда в нем нет нетривиальных идеалов.

Задача 1.4. а) Кольцо $Mat_{n\times n}(k)$ не имеет нетривиальных двусторонних идеалов.
б*) Любой двусторонний идеал кольца $Mat_{n\times n}(R)$ имеет вид $Mat_{n\times n}(I)$, где I — идеал кольца R.

Задача 1.5. Найдите все идеалы и опишите соответствующие факторкольца для кольца аб) $k[x]$; в) $k[[x]]$.

Задача 1.6. Проверьте, что строго верхнетреугольные матрицы являются идеалом в кольце всех верхнетреугольных матриц ($n \times n$ над кольцом R) и найдите факторкольцо.

Задача 1.7. а) Нильпотентные (равные 0 в какой-то степени) элементы коммутативного кольца образуют идеал (“нильрадикал”).
б) В соответствующем факторкольце (ненулевых) нильпотентных элементов нет.
в) Можно ли в пункте (а) отбросить требование коммутативности?

Задача 1.8. а) Если идеалы I и J коммутативного кольца взаимно просты, то $IJ = I \cap J$; б) существенно ли требование взаимной простоты?

Задача 1.9. Если идеалы I и J коммутативного кольца взаимно просты, то идеалы I^m и J^n тоже взаимно просты.