Степень расширения

Задача 4.1. Пусть E/L и L/K — конечнные расширения. Тогда расширение E/K тоже конечно, и $[E:K]=[E:L]\cdot[L:K]$.

Задача 4.2. Найдите степень над $\mathbb{Q}$ числа а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$.

Задача 4.3. а) Элемент α алгебраичен над полем K тогда и только тогда, когда расширение $K(a)/K$ конечно.
б) Если L/K — прозвольное расширение, то множество L^{alg} элементов L, алгебраичных над K, образует поле.

Задача 4.4. Если число α получено из элементов поля $K\subset\mathbb{R}$ при помощи построений циркулем и линейкой, то $[K(\alpha):K]$ является степенью двойки.

Задача 4.5. Циркулем и линейкой нельзя построить отрезок в $\sqrt[3]{2}$ длиннее данного (то есть задача об удвоении куба не имеет решения).

Задача 4.6. Найдите минимальный многочлен числа а) $\cos\frac{2\pi}{9}$; б) $\cos\frac{2\pi}{5}$; в) $\cos\frac{2\pi}{7}$; какие из этих чисел построимы циркулем и линейкой?
Указание. $\cos n\phi$ — многочлен степени n от $\cos\phi$ (“многочлены Чебышева”).

Задача 4.7. Задача о трисекции угла не имеет решения.

Задача 4.8. Если расширение L/K конечно, то $|\operatorname{Aut}(L/K)|\leqslant[L:K]$.

Задача 4.9. Пусть E/K — нормальное расширение, $K\subset L\subset E$ — подрасширение. Тогда расширение E/L нормально.

Задача 4.10. а) Пусть K — конечное поле характеристики p. Тогда отображение $F\colon K\to K$, $x\mapsto x^p$ — автоморфизм этого поля (“автоморфизм Фробениуса”).
б) Если $[K:\mathbb{F}_p]=n$, то автоморфизм Фробениуса имеет в этой группе порядок n.
в) Расширение степени n поля $\mathbb{F}_p$ существует и единственно.
г) $\operatorname{Aut}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Задача 4.11. Когда поле из p^n элементов вкладывается в поле из p^m элементов?