Максимальные идеалы и локализация

Задача 7.1. Кольцо нётерово тогда и только тогда, когда каждый его идеал конечно порожден.

Задача 7.2. Различные максимальные идеалы взамно просты.

Задача 7.3. Кольцо $\mathbb{Z}_{(p)}$ — кольцо главных идеалов.

Задача 7.4. а) Идеал $\mathfrak{m}$ кольца A максимален тогда и только тогда, когда $A/\mathfrak{m}$ поле.
б) Если элемент локального кольца не лежит в максимальном идеале, то он обратим.

Задача 7.5. а) Прообраз простого идеала при гомоморфизме колец является простым идеалом. б) Верно ли аналогичное утверждение для максимальных идеалов?

Задача 7.6. Идеал J кольца A является прообразом некоторого идеала из $S^{-1}A$ тогда и только тогда, когда никакой элемент $s \in S$ не делит нуль в A/J.

Задача 7.7. а) Идеал, состоящий из нильпотентных элементов (“нильрадикал”), содержится в каждом простом идеале.
б) Пересечение всех простых идеалов равно нильрадикалу.
Указание. Пусть элемент a кольца A не нильпотентен. Рассмотрите кольцо $A[a^{-1}]$.

Задача 7.8. Пусть $f\colon M \to N$ — гомоморфизм конечнопорожденных A-модулей.
а) Если для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m}$ гомоморфизм $f_\mathfrak{m}\colon M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ инъективен, то и гомоморфизм f инъективен.
б) Если кольцо A локально с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, и гомоморфизм $\bar{f}\colon M/\mathfrak{m}M \to N/\mathfrak{m}N$ сюрьективен, то и гомоморфизм f сюрьективен.