НМУ, Математический анализ (2-й семестр). Листок 12. 15 февраля 2013 г.

Функции многих переменных. Функции, заданные неявно II.

1. Вычислите якобианы перехода от (а) полярных, (б) сферических координат к декартовым координатам.

2. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$, $f \in C^{(1)}(U)$, и частные производные F не обращаются в ноль в некоторой точке. Пусть $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, $z = z(x,y)$ – функции, неявно заданные уравнением $F(x,y,z) = 0$. Найдите $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$.

3. Покажите, что корни уравнения

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

гладко зависят от его коэффициентов, во всяком случае, пока все корни различны.

4. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – гладкое отображение, удовлетворяющее системе уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

(а) Покажите, что якобиан такого отображения равен нулю в некоторой точке тогда и только тогда, когда матрица $f'(x)$ в этой точке нулевая.

(б) Покажите, что если $f'(x) \neq 0$, то в окрестности точки x определено обратное отображение f^{-1}, которое также удовлетворяет системе уравнений Коши-Римана.

5. Пусть U – область в $\mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$, $x \in U$. Докажите, что множество всех касательных к графику функции f полностью определяет функцию f. Более того, множество касательных прямых может быть параметризовано как $y = px - g(p)$, то есть в качестве параметра p можно взять тангенс угла наклона касательной, а $g(p) = \hat{f}(p)$ – функция от p, определенная на открытом множестве $\hat{U}$ значений параметра p. Эта функция называется *преобразованием Лежандра* функции f.

6. В предположениях предыдущей задачи докажите, что $\hat{f}'' > 0$ для всех $x \in \hat{U}$.

7. Вычислите преобразование Лежандра функций (а) $f(x) = e^x$, (б) $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 1$.

8. Докажите неравенство Юнга: $f(x) + \hat{f}(p) \geqslant px$. Выведите отсюда, что

$$\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta} \geqslant px, \quad \text{если} \quad \alpha, \beta > 1, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

9. Проверьте, что $\hat{\hat{f}} = f$.

Огибающей семейства кривых $\{\gamma_t\}$, зависящих от параметра t, называется кривая γ, если она в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства γ_t и каждым своим отрезком касается бесконечного множества этих кривых.

10. Пусть $\{\gamma_t\}_{t \in I}$ – семейство кривых на плоскости, заданных неявно:

$$\gamma_t = \{(x,y) | f_t(x,y) = 0\},$$

где f_t – гладкая функция, причем $df_t \neq 0$ на γ_t. Предположим, что функция $f(t,x,y) = f_t(x,y)$ также гладкая. Докажите, что огибающая семейства кривых $f_t(x,y) = 0$ равна $E = \{(x,y) | f(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x,y) = 0\}$.

11. Пусть $I_0 \subset I$ и $\varphi : I_0 \to \mathbb{R}^2$ – гладкая кривая, касающаяся γ_t в точке $\varphi(t)$ для всех t. Докажите, что $\varphi(I_0) \subset E$.

12. Найдите огибающую семейства отрезков длины l с концами на положительных полуосях.

13. Найдите границу зоны досягаемости снаряда (кривую безопасности) при стрельбе из артилерийского орудия с постоянной начальной скоростью v_0 под произвольными углами к горизону.