Измеримые функции

1. (*единственность лебеговского продолжения*). Пусть $\tilde{\mu}$ – σ-аддитивная мера на некоторой σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств $\mathbb{R}^n$, содержащей все параллелепипеды вида $I_1 \times \ldots \times I_n$ (где $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}^n$ – промежутки). Предположим, что для любого такого параллелепипеда I справедливо равенство $\tilde{\mu}(I) = \mu(I)$ (μ – мера Лебега). Докажите, что $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ для любого измеримого по Лебегу $A \in \mathcal{A}$.

2. Докажите, что любое измеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}$, имеющее положительную меру, содержит неизмеримое подмножество.

Определим функцию $c(x)$ в концах отрезка $[0,1]$, полагая $c(0) = 0$ и $c(1) = 1$, а затем доопределим ее на «средней трети» $[1/3, 2/3]$ этого отрезка формулой $c(x) = (c(0) + c(1))/2$. Затем проделаем ту же процедуру с отрезками $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ в итоге получим функцию на множестве $\{0\} \cup [1/9, 2/9] \cup [1/3, 2/3] \cup [7/9, 8/9] \cup \{1\}$, принимающую на отрезках $[1/9, 2/9]$ и $[7/9, 8/9]$ значения $1/4$ и $3/4$ соответственно. Продолжая этот процесс, получим функцию $c : D \to [0,1]$, где $D \supset [0,1] \setminus C$, а C – канторово множество.

3. а) Докажите, что построенная выше функция $c : D \to [0,1]$ единственным образом продолжается до непрерывной функции $c : [0,1] \to [0,1]$. Эта функция называется *канторовой лестницей.*

б) Докажите, что $c(x)$ не убывает на $[0,1]$, и $c'(x) = 0$ п.в. на [0,1].

в) Верно ли, что при непрерывном отображении множество меры ноль переходит в множество меры ноль?

г) Верно ли, что непрерывные функции отображают измеримые множества в измеримые?

Пусть X – множество. Характеристической функцией (или индикатором) множества $A \subseteq X$ называется функция $\chi_A : X \to \{0; 1\}$, равная 1 на A и 0 на $X \setminus A$. Если $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ – алгебра множеств, то линейные комбинации функций вида χ_A ($A \in \mathcal{A}$) называются $\mathcal{A}$-простыми.

4. Пусть X – множество, $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ – σ-алгебра.

а) Докажите, что ограниченная функция $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-измерима тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{f_n(x)\}$ $\mathcal{A}$-простых функций, равномерно сходящаяся к f.

б) Докажите, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-измерима тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{f_n(x)\}$ $\mathcal{A}$-простых функций, поточечно сходящаяся к $f(x)$.

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ – промежуток. Функция $f : I \to \mathbb{R}$ называется измеримой по Лебегу, если она $(\mathcal{M}(\mathbb{R}); Bor(\mathbb{R}))$-измерима, и борелевской, если она $(Bor(\mathbb{R}); Bor(\mathbb{R}))$-измерима.

5. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ – промежуток.

а) Докажите, что каждая непрерывная функция $f : I \to \mathbb{R}$ – борелевская.

б) Пусть X – множество, $A \subseteq 2^X$ – σ-алгебра, $f : X \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{A}$-измеримая функция, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борелевская функция. Докажите, что $g \circ f$ – $\mathcal{A}$-измеримая функция.

в) Докажите, что любая измеримая по Лебегу функция $f : I \to \mathbb{R}$ эквивалентна (т.е. равна почти всюду) борелевской.

6. а) Докажите, что существует гомеоморфизм (взаимнооднозначное непрерывное отображение, обратное к которому тоже непрерывно) одного отрезка на другой, переводящий некоторое измеримое по Лебегу множество в неизмеримое. (Указание: требуемый гомеоморфизм можно изготовить, «подправив» канторову лестницу.)

б) Докажите, что прообраз измеримого по Лебегу множества при непрерывном отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ может не быть измеримым по Лебегу.

в) Верно ли, что композиция измеримых по Лебегу функций измерима по Лебегу?

г) Используя результат п. (б), придумайте еще одно доказательство существования измеримых по Лебегу неборелевских множеств на прямой.

д) Докажите, что существуют измеримые по Лебегу неборелевские функции на $\mathbb{R}$.

Вероятностные меры на пространстве последовательностей. Закон нуля или единицы.

Вероятностной мерой на пространстве Ω называется σ-аддитивная мера μ, такая, что

$$\mu(\Omega) = 1.$$

За Ω возьмем пространство всех бесконечных последовательностей нулей и единиц

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots | \omega_i = 0 \text{ или } 1, i = 0, 1, \ldots\}.$$

Базой открытых множеств будем считать множества $\Omega_{\omega_1,\ldots,\omega_n}$ всех последовательностей, имеющих один и тот же начальный кусок $\omega_1, \ldots, \omega_n$, а в качестве меры можнества $\Omega_{\omega_1,\ldots,\omega_n}$ возьмем следующую меру:

$$m(\Omega_{\omega_0,\ldots,\omega_n}) = \prod_{i=0}^{n} r_i, \qquad r_i = \begin{cases} p, & \omega_i = 0; \\ 1-p, & \omega_i = 1. \end{cases},$$

где $p \in [0, 1]$. Построим лебегово продолжение μ меры m, заданной на полукольце, образованном множествами вида $\Omega_{\omega_0,\ldots,\omega_n}$.

7*. Докажите, что множество последовательностей нулей и единиц, инавриантное относительно сдвига, имеет меру μ, равную 0 или 1.

(*Под сдвигом понимается преобразование* $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots) \mapsto (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots)$.)

8*. Докажите, что множество последовательностей нулей и единиц инавриантное относительно изменения в конечном числе знаков имеет меру 0 или 1.

9*. Докажите, что радиус R сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n x^n$, равен одной и той же константе для почти всех $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots)$ из пространства Ω.