# Интеграл Лебега-2

1. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – измеримые подмножества отрезка $[0,1]$ и $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) > n-1$. Докажите, что есть точка $a \in [0,1]$, принадлежащая сразу всем $A_i$.

2. (а) Пусть $f \in L(A)$ и для любого измеримого множества $B \subset A$, выполнено равенство

$$\int_B f d\mu = 0.$$

Докажите, что $f(x) = 0$ почти всюду на $A$.

(б) Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – интегрируемая по Лебегу функция, причем $\int_{[a,x]} f d\mu = 0$ для любого $x \in [a,b]$. Докажите, что $f = 0$ почти ввсюду.

3. (*Неравенство Чебышева.*) Пусть функция $f \in L(A)$, неотрицательна на $A$ и $A_\varepsilon = \{x | x \in A,\ f(x) \geqslant \varepsilon\}$, при $\varepsilon > 0$. Доказать, что

$$\mu(A_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_A f d\mu.$$

4. Пусть $(X, \mu)$ – пространство с мерой. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ интегрируемых функций на $X$ сходится к интегрируемой функции $f$ в среднем, если $\int_X |f - f_n| d\mu \to 0$, $(n \to \infty)$.

(а) Докажите, что если $\mu(X) < \infty$, то равномерная сходимость влечет сходимость в среднем.

(б) Верно ли предыдущее утверждение, если $\mu(X) = \infty$?

(в) Докажите, что сходимость в среднем влечет сходимость по мере.

(г) Придумайте пример последовательности интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, сходящейся к нулю в среднем, но не сходящейся ни в одной точке.

(д) Придумайте пример последовательности интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, сходящейся к нулю в каждой точке, но не сходящейся в среднем.

5. (Меры Стилтьеса). Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра (не $\sigma$-алгебра!) подмножеств полуинтервала $(0,1]$, порожденная всеми полуинтервалами вида $(a,b]$ $(a, b \in (0;1],\ a < b)$. Пусть $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ – неубывающая функция.

(а) Докажите, что на $A$ существует единственная мера $\mathcal{F}$, такая, что $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ для любого полуинтервала $(a,b] \subset (0,1]$.

(б) Докажите, что любая конечная мера на $\mathcal{A}$ имеет указанный вид.

(в) Придумайте условие на функцию $F$, необходимое и достаточное для того, чтобы $\mu_F$ была $\sigma$-аддитивна.

(г) Предположим, что $\mu_F$ $\sigma$-аддитивна. Продолжим ее на $\sigma$-алгебру, содержащую все борелевские подмножества $(0,1]$, тем же способом, что и меру Лебега. Вычислите значения $\mu_F$ на всевозможных отрезках, интервалах и полуинтервалах.

6. Пусть $T$ – произвольное выпуклое компактное тело в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что если $(n-1)$-мерный объем проекции $T$ на любую гиперплоскость не меньше $S$, то $\mathrm{diam} T \leqslant n\frac{V}{S}$, где $V = \mu(T)$.

7*. Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое компактное центрально симметричное относительно нуля тело, $\mathcal{E}$ – эллипсоид максимального объема, содержащийся в $T$:

$$\mathcal{E} \subset T, \qquad \mu(\mathcal{E}) = \sup\{\mu(\mathcal{E}) \,|\, \mathcal{E} \subset T, \mathcal{E} \text{ – эллипсоид}\}.$$

Докажите, что $T \subset \sqrt{n}\mathcal{E}$.

8*. Дана последовательность шаров, радиусы которых стремятся к нулю, а сумма объемов бесконечна. Докажите, что в куб можно положить конечное число шаров из этой последовательности таким образом, что они заполнят $0,99$ его объема.