

Пространства L_p и ряды Фурье

Пространство $L_2([-\pi, \pi])$ – это линейное пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)d\mu,$$

где f и g функции на $[-\pi, \pi]$ с интегрируемым квадратом.

1. Докажите неравенство Коши-Буняковского: $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
2. Воспользовавшись неравенством Юнга, докажите, что выполнено

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

если интегралы, стоящие в правой части существуют и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Это неравенство называется неравенством Гельдера.

- 3*. Докажите неравенство Минковского: при $p \geq 1$ выполнено

$$\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

если интегралы в правой части существуют.

4. Проверьте, что система функций $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ ортогональна в $L_2([-\pi, \pi])$.

5. Найдите формулы для коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$ в $L_2([-\pi, \pi])$. Как выглядит ряд Фурье и формулы для коэффициентов на отрезке $[-l, l]$?

6. Найдите разложение функции $y = x^2$ в ряд Фурье на промежутке $[-1, 1]$. Постройте график суммы ряда Фурье.

7. Найдите разложение функции $y = \frac{\pi-x}{2}$ в ряд Фурье на промежутке $[0, 2\pi)$. Постройте график суммы ряда Фурье.

8. С помощью ряда из предыдущей задачи получите формулу для суммы ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

9. Докажите, что если функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ абсолютно интегрируема на \mathbb{R} , то

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x) \right| dx.$$

10. Пусть $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и $xf(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Докажите, что $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$.