НМУ, Математический анализ (2-й семестр). Листок 19. 19 апреля 2013 г.

Ряды Фурье и задача Штурма–Лиувилля

Тригонометрический ряд Фурье можно переписать в комплексной форме

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

1. Выразите коэффициенты ряда Фурье в комплексной форме через коэффициенты ряда по $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$ и напишите интегральные формулы для коэффициентов c_n.

2. Разложите в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \frac{a \sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}, \qquad |a| < 1, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

(Указание: воспользуйтесь заменой $z = e^{ix}$.)

3. Разложите функцию $f(x) = \cos x$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, \pi]$.

4. Зная коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π, вычислите коэффициенты Фурье $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_n$, $\tilde{b}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ «смещенной» функции $f(x + h)$, $h = \mathrm{const}$.

5. Пусть функции $f, g \in L_2([-\pi, \pi])$. Докажите, что ряд Фурье произвенения fg функций f и g может быть получен почленным перемножением рядов Фурье этих функций.

6. Пусть $f \in C([0, \pi])$ и $f' \in L_2([0, \pi])$ и $f(0) = f(\pi) = 0$. Докажите, что тогда

$$\int_0^\pi (f(x))^2 dx \leqslant \int_0^\pi (f'(x))^2 dx.$$

7. Докажите, что оператор Штурма–Лиувилля

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

определенный на множестве функций $D_L = \{y(x) \,|\, y(x) \in C^2([0, l]),\ y(0) = y(l) = 0\}$ симметричен, т.е. $\forall y_1, y_2 \in D_L$

$$(Ly_1, y_2)_{L_2} = (y_1, Ly_2)_{L_2},$$

где $(\cdot, \cdot)_{L_2}$ – скалярное произведение в $L_2([0, l])$.

8. Покажите, что если линейный оператор L симметричен, то его собственные функции y_1 и y_2 $(Ly_1 = \lambda y_1,\ Ly_2 = \lambda y_2)$, отвечающие различным собственным значениям $\lambda \neq \mu$ ортогональны, т.е. $(y_1, y_2)_{L_2} = 0$.

(*На самом деле, собственные функции оператора Штурма–Лиувилля образуют полную ортогональную систему в* $L_2([0, l])$.)

9. Решите следующие задачи Штурма–Лиувилля, т.е. найдите все функции $y(x)$ и числа λ, удовлетворяющие условиям:

(а) $y'' - \lambda y = 0$, $y(0) = y(l) = 0$;
(б) $y'' - \lambda y = 0$, $y'(0) = y(l) = 0$;
(в) $y'' - \lambda y = 0$, $y'(0) = y'(l) = 0$.