

# КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Михаил Скопенков, Всеволод Шевчишин

---

## 2. Степенные ряды.

**2.1.** Вычислите радиусы сходимости следующих рядов:

(1)  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$ .

(2)  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$ .

(3)  $\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ .

**2.2.** (1) Для каких значений  $z$  с  $|z| = 1$  сходятся ряды  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$  и соответственно  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$  из задачи 2.1?

(2) Найдите сумму ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$  и покажите, что соответствующая функция  $g(z)$  продолжается аналитически на вещественную ось  $Ox$ .

**2.3.** Разложите следующие функции в ряды по степеням  $z$ :

(1)  $f(z) = \arctan z$ ;  $f(z) = \ln(1+z)$ .

**2.4.** (1) Найдите  $f'''(0)$ , где  $f(z) = e^{\sin z}$ .

(2) Найдите  $f^{(298)}(0)$ , где  $f(z) = \sin(z^{99} + z^{100})$ .

**2.5.** Найдите порядки всех нулей следующих функций:

(1)  $f(z) = \sin^3 z$ ; (2)  $f(z) = \sin(z^3)$ .

**2.6.** Существует ли аналитическая функция в круге  $\{z : |z| < 2\}$ , такая что при всех целых  $n > 0$

(1)  $f(1/n) = 1/(n+1)$ ; (2)  $f(1/n) = 1/\sqrt{n}$ ?

**2.7.** *Лакунарная функция.* Докажите, что функция  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$  аналитична в круге  $\{z : |z| < 1\}$ , но не может быть непрерывно продолжена ни в одной точке границы этого круга.

### Результаты участников курса

---

Сережа Кузьмичев	1.1ab, 1.2a
Вова Медведев	1.0, 1.1ab, 1.3±, 1.4
Света Макарова	1.0, 1.1ab, 1.2bc, 1.3–1.4, 1.5±
Артур Томберг	1.0
Саша Викторова	1.0
Вика Малясова	1.0, 1.1ab
Дима	1.3±, 1.4±, 1.6+/2
Леня Тимин	1.7, 1.8±, 1.10
Артем Приходько	1.1–1.4, 1.8

---

E-mail address: [skopenkov@rambler.ru](mailto:skopenkov@rambler.ru)