Комплексный анализ

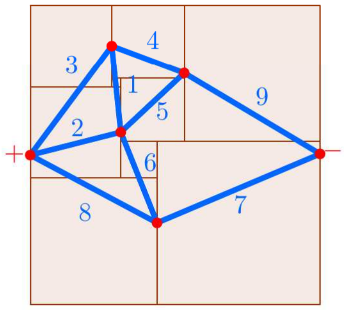
Михаил Скопенков, Всеволод Шевчишин

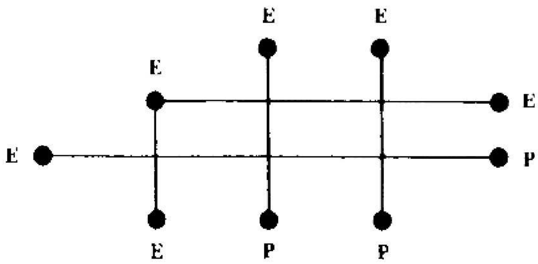
4. Гармонические функции

Объявление: 27 марта в НМУ начинается миникурс Дмитрия Челкака по дискретному комплексному анализу

Пусть дан связный конечный граф с выделенным подмножеством вершин, называемых *граничными*. Функция, заданная на вершинах этого графа, называется *дискретной гармонической*, если ее значение в каждой неграничной вершине равно среднему арифметическому значений в соседних вершинах. (Если у графа есть кратные ребра, то значение в каждой из соседних вершин считается столько раз, сколько ребер соединяют ее с исходной вершиной.)

4.1. (1) *Принцип суперпозиции.* Сумма и разность дискретных гармонических функций — дискретная гармоническая функция.
(2) *Принцип максимума.* Дискретная гармоническая функция достигает своего максимума и минимума в граничных вершинах.
(3) *Теорема единственности.* Если две дискретные гармонические функции совпадают в граничных вершинах, то они совпадают во всех вершинах.





4.2. (1) Имеется прямоугольный шкаф с квадратными полками, изображенный на рисунке слева. Найдите отношение ширины шкафа к его высоте.
(2) По разрезанию прямоугольника на квадраты постоим граф следующим образом; см. рисунок в центре. На каждой вертикальной линии разреза отметим по вершине. На обеих вертикальных сторонах прямоугольника тоже отметим по вершине и будем их считать граничными. Для каждого квадрата соединим ребром две вершины, лежащие на продолжениях его вертикальных сторон. (Возможно, при этом между некоторыми

E-mail address: skopenkov@rambler.ru

парами вершин возникнет несколько ребер.) Пусть значение функции в каждой вершине графа равно абсциссе этой вершине. Докажите, что эта функция — дискретная гармоническая.
(3) Если система линейных уравнений с рациональными коэффициентами имеет единственное решение, то оно состоит из рациональных чисел.
(4) *Теорема Дена.* Если прямоугольник разрезан на квадраты, не обязательно равные, то отношение длин его перпендикулярных сторон рационально.

4.3. Рассмотрим город, схема которого приведена на рисунке справа. Отрезки обозначают улицы. Пути отхода помечены буквой E, а буквой P помечены точки, занятые полицией. По улицам случайным образом перемещается пьяница. Из точки $x = (a, b)$ он перемещается в каждую из точек $(a+1, b), (a-1, b), (a, b+1), (a, b-1)$ с вероятностью $1/4$. Если он достигает одной из граничных точек E или P, то его передвижения заканчиваются. Пусть $P(x)$ — вероятность того, что начав свой путь в точке x, пьяница убежит, а не попадет в руки полиции. Докажите, что $P(x)$ — дискретная гармоническая функция и найдите ее значения с точностью до сотых.

4.4. *Теоремы о среднем.* Пусть функция $u(z)$ гармонична в круге K радиуса r с центром в начале координат. Тогда
(1) $u(0) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\phi})\, d\phi$; (2) $u(0) = \int_K u(z)\, dxdy$.

4.5. (1) *Принцип суперпозиции.* Сумма и разность гармонических функций — гармоническая функция.
(2) *Принцип максимума.* Функция, гармоническая в области и непрерывная на ее замыкании, достигает своего максимума и минимума на границе области.
(3) *Теорема единственности.* Если две функции — гармоничны в области, непрерывны на ее замыкании и принимают одинаковые значения на границе, то они совпадают во всей области.

Результаты участников курса

Сережа Кузьмичев	1.1–1.2, 2.1(12), 2.2(12), 2.3(1), 2.4(1), 2.5(1)
Вова Медведев	1.0, 1.1ab, 1.3±, 1.4–1.5, 1.7, 1.8±, 1.10, 2.0
Света Макарова	1.0, 1.1ab, 1.2bc, 1.3–1.5, 1.8–1.10, 2.0, 2.1(12)
Георгий	2.0
Артур Томберг	1.0
Саша Викторова	1.0
Вика Малясова	1.0, 1.1ab, 1.3–1.4, 1.7–1.8, 1.10, 2.1–2.2, 2.4(12)
Дима Наянов	1.3∓, 1.4±, 1.6+/2, 1.7, 2.5(12), 3.0, 3.1(1)
Леня Тимин	1.7, 1.8∓, 1.10
Артем Приходько	1.1–1.4, 1.8, 2.0, 2.2(2)±
Миша Храмцов	3.0