

5. Аналитическое продолжение

5.1. Найдите все особые точки следующих полных аналитических функций (на расширенной плоскости) и определите, к какому типу они относятся:

(1) $f(z) = \operatorname{Ln} z$; (2) $f(z) = \sqrt{z^3 - z}$; $f(z) = 1/(\operatorname{Ln} z - 1)$.

5.2. Найдите род римановых поверхностей следующих многозначных аналитических функций:

(1) $f(z) = \sqrt{z}$; (2) $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$; (3) $f(z) = \sqrt{z^3 - z}$;

(4) $f(z) = \sqrt{(z - a_1) \cdots (z - a_n)}$; (5) $f(z) = \sqrt[n]{1 - z^n}$,

где a_1, \dots, a_n — попарно различные комплексные числа. *Пояснение:* если поверхность гомеоморфна сфере с g ручками, из которой выколото конечное число точек, то число g называется *родом* поверхности.

5.3. *Принцип симметрии.* Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области Ω , непрерывная на замыкании $\bar{\Omega}$. Пусть для некоторого (1) отрезка $\gamma \subset \partial\Omega$; (2) дуги окружности $\gamma \subset \partial\Omega$; его образ $f(\gamma)$ — тоже (1) отрезок; (2) дуга окружности. Докажите, что $f(z)$ может быть непосредственно продолжена в некоторую область, содержащую γ внутри себя (за исключением, быть может, концов).

5.4. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области Ω . Пусть для некоторого отрезка $\gamma \subset \Omega$ его образ $f(\gamma)$ — тоже отрезок. Докажите, что для любого содержащего его отрезка $\tilde{\gamma} \supset \gamma$ его образ $f(\tilde{\gamma})$ — тоже отрезок.

5.5. * График гармонической функции, заданной (1) во всей плоскости; (2) в некоторой области; и не являющейся линейной функцией, содержит бесконечно много (1) прямых; (2) отрезков прямых. Докажите, что прямые, содержащие проекции этих отрезков на область определения, пересекаются в одной точке или параллельны.

Результаты участников курса

Сергея Кузьмичев	1.1–1.2, 2.1(12), 2.2–2.4, 2.5(1), 3.1(1), 3.2, 3.3(12), 3.6, 4.1(12), 4.2(1), 4.3, 4.4(1), 4.5(123)
Дима Наянов	1.1–1.4, 1.6+ / 2, 1.7, 1.10–1.12, 2.1(12), 2.2, 2.4, 2.5(12), 3.0–3.6, 4.1(123), 4.2(1), 4.3±, 4.4(12), 4.5(12)
Вика Малясова	1.0, 1.1ab, 1.3–1.4, 1.7–1.8, 1.10, 2.1–2.2, 2.4(12), 4.1(12), 4.4(1), 4.5(123)
Вова Медведев	1.0, 1.1ab, 1.3±, 1.4–1.5, 1.7, 1.8±, 1.10, 2.0
Света Макарова	1.0, 1.1ab, 1.2bc, 1.3–1.5, 1.8–1.13, 2.0, 2.1(12), 2.6(12)
Георгий	2.0
Артур Томберг	1.0
Саша Викторова	1.0
Леня Тимин	1.7, 1.8±, 1.10
Артем Приходько	1.1–1.4, 1.8, 2.0, 2.2(2)±
Миша Храмцов	3.0
Леша Пахарев	5.2(45)