**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 10.**
**Геодезические. 15.04.2013.**

*Для получения зачёта в каждом из листков необходимо решить не менее трёх задач.*

**Задача 1.** Построить пример такого связного риманова многообразия $M$ и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_AM \longrightarrow M$ не является

- сюръективным,
- инъективным.

**Задача 2.** Докажите, что в геодезических координатах, центрированных в точке $p$, символы Кристоффеля в точке $p$ обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Докажите, что центрированные в точке $p$ координаты $x^1, \dots, x^n$, определённые в окрестности $U$, являются геодезическими координатами, центрированными в точке $p$, тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk} x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \dots, x^n$ в $U$. *Указание. Обратите внимание на то, что в геодезических координатах, центрированных в точке $p$, геодезические, проходящие через точку $p$, имеют вид $x^i = a^i t$.*

**Задача 3.** Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. *Указание. Найдите два интеграла исходной системы из двух дифференциальных уравнений второго порядка и используйте их для понижения порядка. Вы получите два уравнения, дающие $\dfrac{dx}{dt}$ и $\dfrac{dy}{dt}$. Выпишите тогда уравнение для $\dfrac{dy}{dx}$ и решите его.*

**Задача 4.** Докажите, что в полугеодезических координатах $x^1, \dots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \text{const}, \dots, x^{n-1} = \text{const}$ являются геодезическими с параметром $t = x^n$.

**Задача 5.** Докажите, что геодезическая $\exp_p(tv)$ и геодезическая сфера $\exp_p(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_pM \,||v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

**Задача 6.** Докажите, что геодезические в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) не имеют сопряженных точек.

Докажите, что северный и южный полюс сферы $\mathbb{S}^n$ являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности $n-1$.

Найдите явно якобиевы поля вдоль геодезических на сфере $\mathbb{S}^n$ в подходящем базисе векторных полей.