НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 3. Поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. 25.02.2013.

Для получения зачёта в каждом из листков необходимо решить не менее трёх задач.

Задача 1. Рассмотрим гиперповерхность в $\mathbb{E}^n$. В качестве базиса нормального пространства будем брать единичный нормальный вектор $\eta_1 = \mathbf{m}$. Найти связность в нормальном расслоении.

Задача 2. Докажите формулу

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(\partial_X\langle Y, Z\rangle + \partial_Y\langle Z, X\rangle - \partial_Z\langle X, Y\rangle +$$

$$+\langle Z, [X, Y]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle),$$

не используя координат векторных полей и символов Кристоффеля.

Задача 3. Вывести соотношение между db, b, Γ и K (уравнение Петерсона-Кодацци) по аналогии с уравнением Гаусса $d\,\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = b_\mu \wedge b^\mu$, связывающим $d\,\Gamma$, Γ и b. Доказать, что в случае гиперповерхности если взять единичное поле нормалей в качестве базиса в нормальных векторных полях, то уравнение Петерсона-Кодацци не содержит K. Записать уравнение Петерсона-Кодацци в терминах Γ^l_{ij}, b^μ_{ij}, $K_{i,\nu}^{\ \ \mu}$ в частном случае двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$.

Задача 4. Придумать аналог нормали средней кривизны для k-поверхности в $\mathbb{E}^n$. Естественно, при $k = 2$, $n = 3$ результат должен совпадать с классическим определением (и это надо проверить). *Указание: используйте линейный функционал $\xi \mapsto \operatorname{tr} W_\xi$ на пространстве $N_A M$.*

Задача 5. Рассмотрим кривую в $\mathbb{E}^n$. Легко видеть, что любое базисное касательное векторное поле e_1 можно рассматривать как вектор скорости для некоторой параметризации. Пусть t такой параметр. Доказать, что $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln g_{11}$, а кривизна кривой может быть найдена по формуле

$$k = \sqrt{\left(\frac{b^1_{11}}{g_{11}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{b^{n-1}_{11}}{g_{11}}\right)^2}.$$

Задача 6*. Доказать первое структрурное уравнение Картана

$$d\,e^\alpha = e^\beta \wedge \Gamma^\alpha_\beta,$$

где e^α — базис, дуальный к выбранному базису e_α пространства касательных векторных полей.