НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 4.
Группы и алгебры Ли. 4.03.2013.

Для получения зачёта в каждом из листков необходимо решить не менее трёх задач.

Задача 1. Доказать, что коммутатор двух левоинвариантных (правоинвариантных) векторных полей тоже является левоинвариантным (правоинвариантным).

Доказать, что оба определения коммутатора в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентны. Доказать, что если в определении использовать правоинвариантные векторные поля, то мы получим коммутатор, умноженный на -1.

Доказать, что $\operatorname{ad}\xi(\eta) = [\xi, \eta]$.

Задача 2. Доказать, что группы $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ и $\mathrm{SU}(n)$ являются группами Ли. *Указание: можно рассмотреть стабилизаторы подходящего действия.* Доказать, что

- алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ является пространством всех вещественных $n \times n$-матриц с нулевым следом со стандартным матричным коммутатором;
- алгебра Ли $\mathfrak{so}(n)$ является пространством всех вещественных кососимметрических $n \times n$-матриц со стандартным матричным коммутатором, причём $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$;
- алгебра Ли $\mathfrak{u}(n)$ является пространством всех комплексных косоэрмитовых $n \times n$-матриц со стандартным матричным коммутатором;
- алгебра Ли $\mathfrak{su}(n)$ является пространством всех комплексных косоэрмитовых $n \times n$-матриц с нулевым следом со стандартным матричным коммутатором;

Задача 3. Доказать, что группа Ли всегда ориентируема.

Доказать, что прямое произведение групп Ли является группой Ли. Как найти соответствующую алгебру Ли?

Построить естественные гомоморфизмы групп Ли

$$\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3) \quad \text{и} \quad \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(4).$$

Задача 4. Пусть G — связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — её алгебра Ли. Доказать, что если коммутатор любых элементов $\mathfrak{g}$ равен нулю, то G абелева (поэтому алгебры Ли с нулевым коммутатором называются абелевыми).

Задача 5. Доказать, что

- компонента связности единицы G^0 группы Ли G является нормальной подгруппой Ли группы G,
- компоненты связности группы Ли G являются смежными классами по G^0,
- факторгруппа G/G^0 дискретна.

Задача 6. Пусть группа Ли G *транзитивно* действует на *связном* многообразии M. Доказать, что

- компонента связности единицы G^0 тоже транзитивно действует на M,
- $G/G^0 \cong G_x/(G_x \cap G^0)$ для любой точки $x \in X$,
- если существует такая точка $x \in X$, что стабилизатор G_x связен, то группа Ли G тоже связна.

Найти число компонент связности для $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$.