НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 5.
Параллельный перенос и геодезические. 11.03.2013.

Для получения зачёта в каждом из листков необходимо решить не менее трёх задач.

Задача 1. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ касаются вдоль кривой (то есть в точках кривой касательные плоскости к поверхностям совпадают), то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ касаются вдоль кривой, которая геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают (в такой ситуации говорят, что поверхности пересекаются трансверсально), то эта кривая является прямой.

Задача 2. Найти оператор переноса на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$. Как он зависит от кривой?

На какой угол повернётся касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели $\psi = \psi_0$ на угол α?

Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

Указание: чтобы сформулировать ответ, выберите разумный базис в векторных полях.

Задача 3. Доказать, что если прямая лежит на поверхности, то она будет геодезической на этой поверхности.

Доказать, что геодезическими на k-плоскости $\mathbb{E}^k$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ являются в точности прямые.

Найти геодезические на сфере, цилиндре, круговом конусе (все три поверхности в $\mathbb{E}^3$).

Задача 4. Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

Описать геодезические на поверхности вращения, получив соотношение между r и α, где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 5. Найти на круговом конусе самопересекающиеся геодезические. *Указание: рассмотрите развёртку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.*

Задача 6*. Доказать, что геодезические в произвольной параметризации, лежащие на поверхности M и проходящие через заданные точки A и B, совпадают с экстремалями функционала длины

$$L[\gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt,$$

где $\gamma(t_0) = A$, $\gamma(t_1) = B$. Это утверждение обобщает свойство прямой быть кратчайшей, соединяющей две заданных точки.