Задачи

Задача 1.1. Прямое произведение групп Ли является группой Ли.

Задача 1.2. Подгруппа Ли сама является группой Ли.

Задача 1.3. Пусть H – подгруппа группы Ли G. Если существует такая окрестность $O(e)$ единицы в группе G, что $H \cap O(e)$ есть подмногообразие, то H – подгруппа Ли.

Задача 1.4. Всякая подгруппа Ли замкнута.

Задача 1.5. Группа $SL_n(\mathbb{k})$ матриц порядка n с единичным определителем есть подгруппа Ли коразмерности 1 группы Ли $GL_n(\mathbb{k})$.

Задача 1.6. Группа $O_n(\mathbb{k})$ ортогональных матриц порядка n есть подгруппа Ли размерности $\frac{n(n-1)}{2}$ группы Ли $GL_n(\mathbb{k})$.

Задача 1.7. Группа U_n унитарных матриц порядка n есть вещественная подгруппа Ли в группе Ли $GL_n(\mathbb{C})$. Найти её размерность.

Задача 1.8. Рассмотрим двумерный вещественный тор $\mathbb{T}^2 = \{(e^{ix}, e^{iy}) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. При каких α, $\beta \in \mathbb{R}$ подгруппа $\{(e^{i\alpha x}, e^{i\beta x})\}$ является подгруппой Ли в $\mathbb{T}^2$?

Задача 1.9. Каждой матрице $A \in GL_n(\mathbb{k})$ сопоставим линейные преобразования $\operatorname{Ad} A$ и $\operatorname{Sq} A$ пространства $Mat_n(\mathbb{k})$ по следующим формулам:

$$(\operatorname{Ad} A)X = AXA^{-1}, \quad (\operatorname{Sq} A)X = AXA^T.$$

Доказать, что Ad и Sq – линейные представления группы Ли $GL_n(\mathbb{k})$ в пространстве $Mat_n(\mathbb{k})$.

Задача 1.10. Пусть задано действие α группы Ли G на многообразии X, и пусть x – какая-то точка этого многообразия. Пусть $\alpha_x \colon G \to X, \quad g \mapsto \alpha(g)x$. Тогда отображение α_x дифференцируемо и имеет постоянный ранг.

Задача 1.11. Найти $\dim \mathrm{Sp}_{2k}$.

Задача 1.12. Даны гладкие многообразия X, Y, Z, отображение $p : X \to Y$, являющееся локально тривиальным расслоением, гладкое отображение $q \colon X \to Z$ и $\varphi \colon Y \to Z$, такие, что $q = \varphi p$. Тогда φ – гладкое отображение. Если q – локально тривиальное расслоение, а φ – биекция, то φ – диффеоморфизм.

Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – подгруппа Ли, G/H – множество левых смежных классов, $p \colon G \to G/H$. Мы хотим ввести на G/H топологию следующим образом: $U \subset G/H$ открыто тогда и только тогда, когда $p^{-1}(U) \subset G$ открыто. Также мы хотим ввести на G/H дифференцируемую структуру и доказать её единственность.

Задача 1.13. Доказать, что G/H хаусдорфово.

Задача 1.14. Доказать, что существует такое подмногообразие $S \subset G$, содержащее единицу e, что отображение

$$\mu \colon S \times H \to G, \quad (s, h) \mapsto sh,$$

является диффеоморфизмом прямого произведения $S \times H$ на открытое подмножество группы G.