

Задачи

Задача 10.1. Пусть Δ – система простых корней, а α – положительный корень, не являющийся простым. Докажите, что при некотором $\beta \in \Delta$ вектор $\alpha - \beta$ является корнем, причём положительным.

Задача 10.2. Докажите, что каждый положительный корень β представим в виде суммы

$$\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k, \quad \alpha_i \in \Delta,$$

притом так, чтобы все частичные суммы

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_h, \quad 1 \leq h \leq k,$$

тоже были корнями.

Задача 10.3. Пусть для $w \in W$ выполняется равенство $w(\Delta) = \Delta$. Докажите, что тогда $w = e$.

Задача 10.4. Определим двойственную систему корней Φ^\vee как множество двойственных векторов в двойственном пространстве. Пусть $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee | \alpha \in \Delta\}$. Докажите, что это система простых корней в Φ^\vee .

Задача 10.5. Докажите, что в W имеется единственный элемент w , переводящий Δ в $-\Delta$. Докажите, что любое разложение для w по σ_{α_i} должно включать все σ_{α_i} . Чему может равняться длина этого разложения?