

Задачи

Задача 11.1. Пусть V – \mathfrak{g} -модуль, в нём выделена сумма всех весовых подпространств

$$V' = \sum_{\mu} V^{\mu}.$$

Докажите, что она прямая, а пространство V' инвариантно относительно действия \mathfrak{g} .

Задача 11.2. Выпишите явно решётки весов для систем корней A_n , B_n , C_n и D_n . Укажите доминантный конус.

Задача 11.3. Докажите, что для любой линейной функции $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ существует неприводимый \mathfrak{g} -модуль со старшим весом λ (возможно, бесконечномерный).

Задача 11.4. Докажите, что для любого натурального числа d количество различных неприводимых \mathfrak{g} -модулей $V(\lambda)$ размерности не выше, чем d , конечно.

Задача 11.5. Пусть $\lambda \in \Lambda^+$. Докажите, что 0 является весом модуля $V(\lambda)$, если и только если λ является суммой корней (с целыми коэффициентами).

Задача 11.6. Напомним, что

$$\rho = 1/2 \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha.$$

Докажите тождество

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) e^{w(\rho)}.$$