

Задачи

Задача 6.1. Пусть \mathfrak{g} – линейная алгебра Ли, X, Y – её элементы. Доказать тождества

$$(\operatorname{ad} X)^n Y = \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m X^{n-m} Y X^m,$$

$$X^n Y = \sum_{m=0}^n C_n^m (\operatorname{ad} X)^{n-m} Y X^m.$$

Задача 6.2. Пусть \mathfrak{g} – произвольная алгебра Ли над полем \mathbb{k} , $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$. Доказать тождество

$$(\operatorname{ad} X - \lambda - \mu)^n [Y, Z] = \sum_{m=0}^n C_n^m [(\operatorname{ad} X - \lambda)^{n-m} Y, (\operatorname{ad} X - \mu)^m Z].$$

Задача 6.3. Описать все регулярные элементы в а) $\mathfrak{sl}(2)$, б) в $\mathfrak{aff}(1)$.

Задача 6.4. Описать картановские подалгебры и корневые разложения для $\mathfrak{sl}(2)$.

Задача 6.5. Алгебра Ли \mathfrak{g} удовлетворяет условию $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Можно ли утверждать, что \mathfrak{g} полупроста?

Задача 6.6. Опишите все алгебры Ли с одномерным коммутантом.

Задача 6.7. Найдите радикал аффинной алгебры Ли $\mathfrak{aff}(n)$.

Задача 6.8. Опишите все комплексные алгебры Ли размерности 4, не являющиеся разрешимыми.