

Задачи

Задача 9.1. Пусть α и β – такие корни, что $(\alpha, \beta) > 0$. Докажите, что $\alpha - \beta$ также является корнем. Верно ли обратное?

Задача 9.2. Для систем корней типов $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$ выпишите матрицу Картана и вычислите её определитель.

Задача 9.3. Докажите, что если одна схема Дынкина содержится в другой (например, E_7 в E_8), то это верно и для соответствующих систем корней.

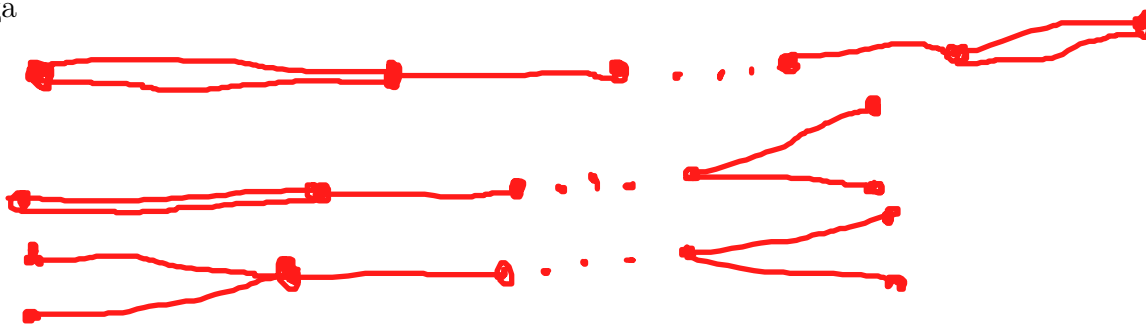
Задача 9.4. Если Δ является системой простых корней для Φ и $\alpha, \beta \in \Delta$, причём $\alpha \neq \beta$, то $(\alpha, \beta) \leq 0$ и $\alpha - \beta$ не является корнем.

Определение. Будем называть множество векторов единичной длины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ *допустимым*, если данные векторы линейно независимы и для всех $i \neq j$

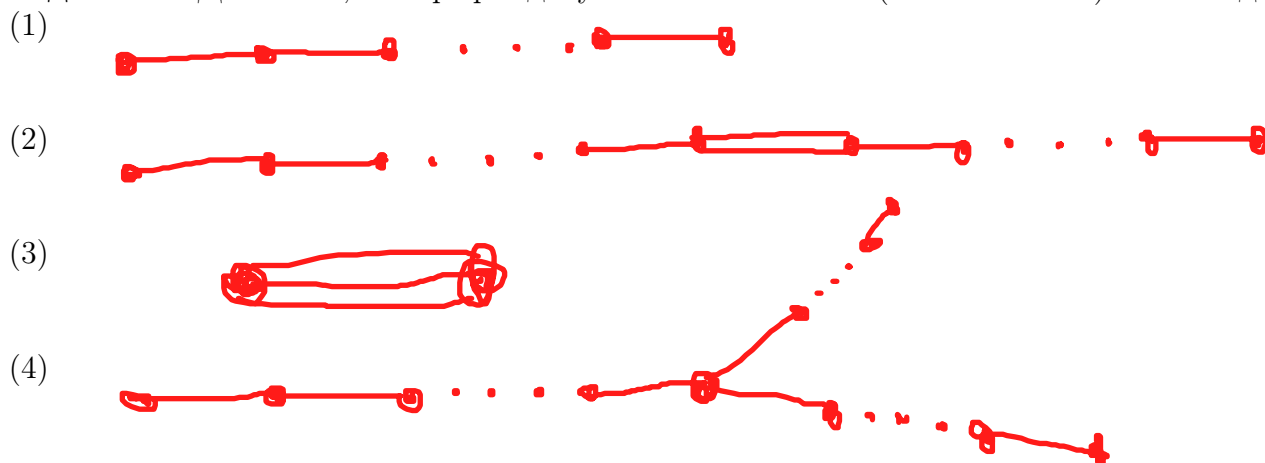
$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0, \quad 4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Каждому допустимому множеству сопоставляется граф Γ на n вершинах, вершины i и j соединяются $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2$ рёбрами.

Задача 9.5. Докажите, что граф Γ допустимого множества не содержит подграфов вида



Задача 9.6. Докажите, что граф Γ допустимого множества (если он связан) имеет вид



Задача 9.7. Докажите, что среди графов вида (4) подходят только графы Кокстера D_n и E_6, E_7, E_8 .