1. Диаграммы Хегора. 7 февраля 2013

Какие бывают многообразия?

Есть много разных видов многообразий, и взаимосвязи между ними — технически сложные теоремы (или открытые проблемы). В трёхмерном случае, как и в двумерном, между разными классами многообразий разницы нет, но в более высоких размерностях ситуация другая. Вкратце она выглядит так.

Многообразие класса C^1 гомеоморфно многообразию класса C^∞. Существуют топологические многообразия, не гомеоморфные гладким многообразиям. Существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные гладкие многообразия. Любое гладкое многообразие триангулируемо. Любое топологическое трёхмерное многообразие гомеоморфно гладкому многообразию (Moise, 1952).

Hauptvermutung состоит из двух предположений: 1) любые две триангуляции триангулируемого пространства комбинаторно эквивалентны (становятся изоморфными после подразделения). 2) Любой гомеоморфизм полиэдров гомотопен симплициальному изоморфизму их подразделений (отдельно — для многообразий). Для 1) В 1961 г. Milnor построил контрпример (не для многообразий). Потом был построен контрпример и для многообразий (Kirby, Siebenmann 1969). Гипотеза 2) тоже оказалась неверной.

Для 3-мерных многообразий Hauptvermutung доказал Moise (1952): любое 3-мерное многообразие триангулируемо и любые две триангуляции комбинаторно эквивалентны.

Комбинаторная триангуляция: звезда любого симплекса — это триангулированный диск. Существуют триангуляции многообразий, которые не являются комбинаторными. В любой размерности не менее 4 существует многообразие, не допускающее комбинаторной триангуляции (размерность $\geqslant 5$ — Kirby, Siebenmann 1969; размерность 4 — Freedman, Quinn 1982).

В размерности 4 существует многообразие, не допускающее никакой триангуляции (Freedman, Quinn 1982). В размерности не менее 5

— это открытая проблема.

В дальнейшем мы не будем различать топологические, триангулированные и гладкие трёхмерные многообразия: в трёхмерном случае это одно и то же.

Разбиения Хегора

Теорема 1. *Замкнутое ориентируемое многообразие получается в результате склейки двух тел с ручками по гомеоморфизму границ.*

Для доказательства нужно взять триангулированное многообразие и рассмотреть его второе барицентрическое подразделение. Объединение симплексов второго барицентрического подразделения, имеющих общие точки с одномерным остовом исходной триангуляции, — это одно тело с ручками. Дополнение — второе тело с ручками.

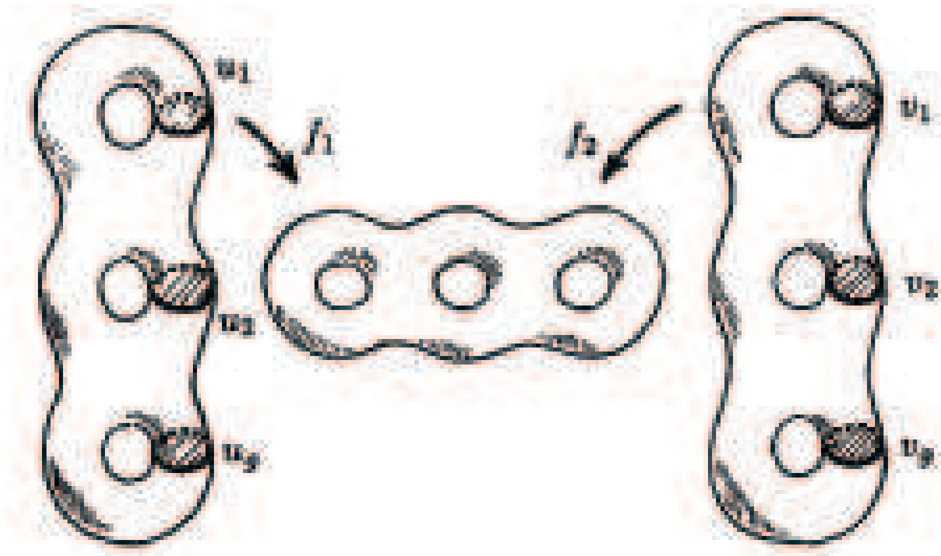
Таким образом, ориентируемое трёхмерное многообразие можно задать гомеоморфизмом ориентируемой двумерной поверхности на себя.

Род трёхмерного многообразия — минимальный род тел с ручками, из которых его можно получить. Сфера S^3 — единственное многообразие рода 0. Многообразия рода 1 — это так называемые линзы (линзовые пространства).

Задача 1. Представьте сферу S^3 в виде объединения двух полноторий.

Без доказательства. Для неориентируемых многообразий есть аналогичное разбиение на неориентируемые тела с ручками. (Ручку к шару можно приклеить двумя способами: ориентируемо и неориентируемо.) Доказательство можно прочитать в книге Hempel, с. 14–23. Для неориентируемых многообразий тоже можно определить род.

Задача 2. Докажите, что шар с одной неориентируемо приклеенной ручкой и n ориентрируемо приклеенными ручками гомеморфен шару с $n+1$ неориентируемо приклеенной ручкой.



Задача 3. Докажите, что существует только одно замкнутое неориентирумое трёхмерное многообразие рода 1: нериентируемое расслоение сфер над окружностью.

Диаграммы Хегора

Сопоставим разбиению Хегора многообразия M^3 на тела с g ручками M_1 и M_2 систему замкнутых кривых на сфере с g ручками N. На M_1 и M_2 рассмотрим меридианы $u_1, \ldots, u_g$ и $v_1, \ldots, v_g$, разрезающие ручки. Склеивающий гомеоморфизм $f\colon \partial M_1^3 \to \partial M_2^3$ представим в виде композиции гомеоморфизмов f_1 и f_2^{-1} (см. рисунок).

Определение 1. *Систему кривых $\{f_1(u_i)\}$ и $\{f_2(v_i)\}$ $(i = 1, \ldots, g)$ называют диаграммой Хегора многообразия M^3.*

Теорема 2. *Если два многообразия имеют одну и ту же диаграмму Хегора, то они гомеоморфны.*

В качестве каждой из двух систем кривых можно взять произвольный набор из g попарно не пересекающихся кривых, дополнение к которым связно. Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Если сферу с g ручками разрезать по g замкнутым кривым, не разбивающим её на части, то в результате получим сферу S^2, из которой вырезано $2g$ дисков.*

Для доказательства леммы нужно заметить, что эйлерова характеристика сферы с h ручками, из которой вырезано $2g$ дисков, равна $(2-2h)-2g$.

Задача 4. Сфера с двумя ручками гладко вложена в S^3. Обязательно ли хотя бы одна из частей, на которые она разбивает сферу, является телом с двумя ручками?

Замечание. *Тор, вложенный в S^3, разбивает сферу на части, одна из которых — полноторие.*

Линзы

Склейкой двух полноторий можно получить S^3 и (при склейке по тождественному отображению краёв) $S^1 \times S^2$.

Пусть p и q — взаимно простые числа, $p \geqslant 3$. На $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ зададим действие элемента $\sigma \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ следующим образом: $\sigma(z,w) = (e^{2\pi i/p}z, e^{2\pi iq/p}w)$. Отождествим точки $x \in S^3$, $\sigma x, \ldots, \sigma^{p-1}x$. Это действие без неподвижных точек, поэтому в результате получается многообразие. Обозначим его $L(p,q)$. Линзовое пространство $L(p,q)$ тоже получается из двух полноторий (это мы докажем позже).

Задача 5. а) Опишите клеточную структуру пространства $L(p,q)$.

б) Докажите, что $\pi_1(L(p,q)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

в) Докажите, что линзы $L(p,q)$ и $L(p,q^{-1})$ гомеоморфны.

г)* Докажите, что линзы $L(p,q_1)$ и $L(p,q_2)$ гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда $q_1 \equiv \pm a^2 q_2 \pmod p$.

Литература

Прасолов В.В., Сосинский А.Б., Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия, 1997. (С. 101–116.)

Hempel J., 3-Manifolds, 1976. (С. 14–23.)