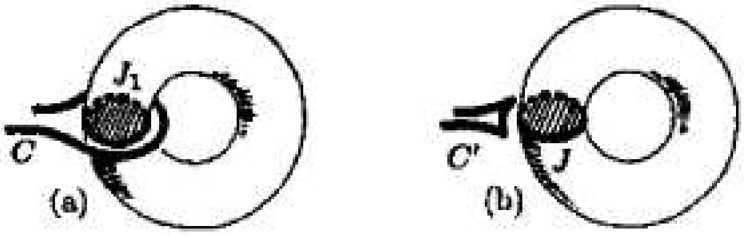

Рис. 1. Протаскивание через меридиональный диск

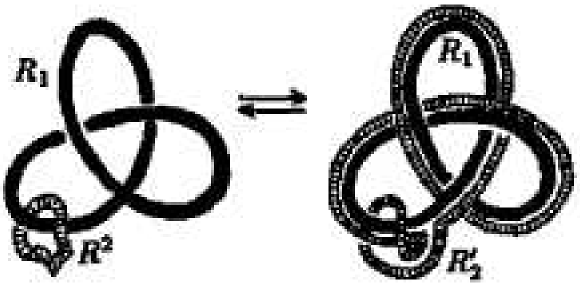

Рис. 2. Второе преобразование Кирби

10. Инварианты трёхмерных многообразий. 11 апреля 2013

Исчисление Кирби

Первое преобразование Кирби — добавление или уничтожение незаузленной окружности с оснащением ± 1, не зацепленной с остальными компонентами оснащённого зацепления, задающего трёхмерное многообразие. На предыдущей лекции подробно обсуждалось, что это преобразование не изменяет получаемое в результате многообразие.

Второе преобразование Кирби связано с тем, что после перестройки на каждую компоненту зацепления будет натянут меридиональный диск. Поэтому любую другую компоненту можно протащить через этот меридиональный диск (рис. 1); полученное в результате многообразие при этом не изменится. В исходной сфере это преобразование устроено так, как показано на рисунке

Имеет место трудно доказываемая теорема Кирби: два оснащённых зацепления представляют одно и то же трёхмерное многообразие тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга преобразованиями Кирби.

Перекрученную полоску можно расположить так, чтобы она была параллельна плоскости диаграммы. Тогда её можно изображать как обычную диаграмму зацепления. Оснащение задаётся при этом петельками. К оснащённым зацеплениям нельзя применять первое преобразование Рейдемейстера Ω_1, уничтожающее петельку, но можно применять преобразование Ω_1', при котором одновременно уничтожаются две петельки, закрученные в разные стороны.

Пространство $S(F, 2n)$

Для построения инвариантов трёхмерных многообразий, заданных оснащёнными зацеплениями, нам потребуются пространства $S(F, 2n)$, которые строятся по аналогии со скобкой Кауфмана. Такие пространства инварианты относительно преобразований Рейдеместера Ω_1, Ω_2 и Ω_3, поэтому если строить с их помощью инварианты трёхмерных многообразий, то нужно позаботиться только об инвариантности относительно преобразований Кирби.

Скобка Кауфмана удовлетворяет трём соотношениям (рис. 3). Нормировочное соотношение (3) для наших целей неудобно; его мы изменим. А двумя первыми соотношениями мы воспользуемся следующим образом. Рассмотрим линейное пространство V над $\mathbb{C}$, состоящее из конечных линейных комбинаций попарно не изотопных диаграмм зацеплений, и профакторизуем его по соотношениям (1) и (2), фиксировав значение $a = a_0$. Соотношение (1) позволяет уничтожить перекрёстки, а соотношение (2) позволяет уничтожить окружности. В результате получаем одномерное пространство, которое обозначим $S(\mathbb{R}^2)$. Элементу этого пространства можно сопоставить число, если выбрать базисную диаграмму. Когда в качестве базисной диаграммы выбирается

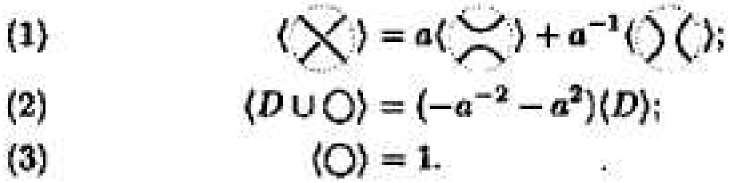

Рис. 3. Соотношения для скобки Кауфмана

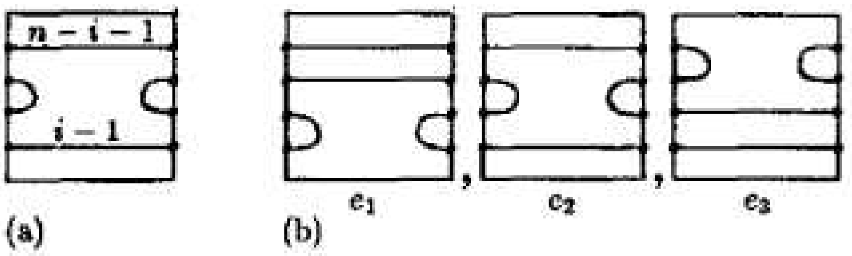

Рис. 4. Образующие алгебры Темперли–Либа

окружность, получается значение скобки Кауфмана при $a = a_0$. Но сейчас удобнее выбрать другую нормировку: в качестве базисной выбрать пустую диаграмму. Тогда будет выполняться свойство мультипликативности: объединению непересекающихся диаграмм сопоставляется значение, равное произведению значений, сопоставляемых этим диаграммам.

Аналогичное факторпространство $S(F, 2n)$ можно построить для любой ориентируемой поверхности F с $2n$ отмеченными точками края. Кривая пересекает край поверхности F в точности в этих $2n$ точках. Базис пространства $S(F, 2n)$ состоит из диаграмм, которые не содержат ни перекрёстков, ни стягиваемых замкнутых кривых.

Несложно проверить, что $S(S^2) \cong S(\mathbb{R}^2)$ и $S(I \times S^1) \cong \mathbb{C}[\alpha])$ — алгебра многочленов над $\mathbb{C}$ от переменной α; моному α^n соотвествует n окружностей, параллельных основаниям цилиндра; умножение в алгебре — склеивание цилиндров.

Алгебра Темперли–Либа

Рассмотрим пространство $S(D^2, 2n)$. Его можно снабдить структурой алгебры, рассматривая диск с $2n$ отмеченными точками как квадрат, на двух противоположных сторонах которого отмечено по n точек. Умножение в алгебре задаётся стыковкой двух квадратов. Можно доказать, что эта алгебра (называемая алгеброй Темперли–Либа) порождена элементом 1_n (соответствующим диаграмме с n параллельными отрезками) и элементами e_1, …, e_{n-1}, изображёнными на рисунке 4 (на рисунке (a) изображён элемент общего вида, а на рисунке (b) — элементы e_1, e_2 и e_3 для $n = 4$).

Рассмотрим подалгебру A_n, порождённую элементами e_1, …, e_{n-1} (отсутствует только элемент 1_n). Можно доказать, что если $a_0^{4k} \neq 1$ при $k = 1, \dots, n-1$, то существует единственный элемент $f^{(n)}$, удовлетворяющий соотношениям $f^{(n)}A_n = A_n f^{(n)} = 0$ и $1_n - f^{(n)} \in A_n$. Этот элемент является идемпотентом и называется *идемпотентом Джонса–Венцля.*

Элементу алгебры Темперли–Либа можно сопоставить элементы пространства $S(\mathbb{R}^2)$ и алгебры $S(I \times S^1)$, замкнув каждую диаграмму таким же образом, как делалось замыкание косы (в случае $S(I \times S^1)$ замыкающие нити идут параллельно основаниям цилиндра). При этом элементу $f^{(n)}$ будут сопоставлены число Δ_n и многочлен $S_n(\alpha)$; напомним, что элемент пространства $S(\mathbb{R}^2)$ можно рассматривать как число, выбрав базисную диаграмму, и мы договорились, что в качестве базисной выбирается пустая диаграмма.

Инвариантность относительно второго преобразования Кирби

Сопоставим каждой m-компонентной оснащённой диаграмме D полилинейное отображение

$$\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_D \colon S_1 \times \dots \times S_m \to S(\mathbb{R}^2),$$

Рис. 5. Окружность с оснащением ± 1

где $S_i \cong S(I \times S^1)$. Для этого достаточно задать $\langle \alpha_1^{k_1}, \ldots, \alpha_m^{k_m} \rangle_D$, где $\alpha_i^{k_i}$ — диаграмма, состоящая из k_i окружностей, i — номер компоненты зацепления. Требуемую диаграмму получаем так: на ленте, задающей оснащение i-й компоненты, рисуем k_i окружностей, параллельных краям ленты. Затем переходим к диаграмме на плоскости, а от диаграммы — к элементу $S(\mathbb{R}^2)$. Полученное полилинейное отображение — инвариант диаграммы оснащённого зацепления (т.е. инвариант относительно преобразований Рейдемейстера Ω_1', Ω_2 и Ω_3).

Чтобы получить инвариант многообразия, нужно обеспечить инвариантность относительно преобразований Кирби. Сначала относительно второго. Рассмотрим элемент

$$\omega = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n S_n(\alpha) \in S(I \times S^1),$$

где $r \geqslant 3$ — целое число (элемент ω зависит от r и от a_0, хотя это и не отражено в обозначениях).

Можно доказать, что если a_0^4 — примитивный корень степени r из единицы, то $\langle \omega, \omega, \ldots, \omega, \rangle_D$ — инвариант относительно второго преобразования Кирби.

Инвариантность относительно первого преобразования Кирби

Рассмотрим матрицу попарным коэффициентов зацепления компонент оснащённого зацепления. Эта матрица симметрическая, поэтому все её собственные числа вещественные; пусть b_+ — количество положительных собственных значений, b_- — отрицательных. Матрица зависит от выбора ориентаций компонент зацепления, но числа b_+ и b_- не зависят. Можно также доказать, что эти числа не изменяются при втором преобразовании Кирби.

Рассмотрим диаграммы U_+ и U_- (рис. 5), соответствующие незаузленной окружности с оснащением ± 1. Можно доказать, что если a_0 — примитивный корень степени $4r$ из единицы или r нечётно и a_0 — примитивный корень степени $2r$ из единицы, то $\langle \omega \rangle_{U_+} \langle \omega \rangle_{U_-}$. (Отметим, что в обоих случаях a_0^4 — примитивный корень степени r из единицы, поэтому инвариантость относительно второго преобразования Кирби имеет место). Для таких a_0 можно доказать, что

$$I(D) = \langle \omega, \omega, \ldots, \omega, \rangle_D \langle \omega \rangle_{U_+}^{-b_+} \langle \omega \rangle_{U_-}^{-b_-}$$

— инвариант относительно первого преобразования Кирби; инвариантность $I(D)$ следует из сказанного выше.

Литература

Прасолов В.В., Сосинский А.Б., Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия, 1997. (С. 174–184, 243–278.)