Рис. 1. Соотношение

Рис. 2. Одночленное соотношение

11. Инварианты Васильева. 18 апреля 2013

Одночленное соотношение

При изучении инвариантов узлов полезно распространить их на более широкий класс объектов — на сингулярные узлы, т.е. допустить трансверсальные самопересечения. Численный инвариант ориентированного сингулярного узла называется *инвариантом Васильева*, если он удовлетворяет соотношению, изображённому на рисунке 1. Непосредственно из определения следует так называемое *одночленное соотношение* (рис. 2). Почти так же доказывается *обобщённое одночленное соотношение* (рис. 3).

Четырёхчленное соотношение

Из определения следует также *четырёхчленное соотношение* (рис. 4). Для доказательства нужно применить определяющее соотношение к каждой из диаграмм к точкам пересечения кривой стрелки с прямыми стрелками.

Порядок инварианта

Инварианты Васильева образуют линейное пространство V над полем $\mathbb{R}$. В этом пространстве удобно рассмотреть подпространства $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \ldots$, состоящие из инвариантов порядка не более n, т.е. из инвариантов, тождественно равных нулю на любом сингулярном узле с более чем n точками самопересечения.

Из определяющего соотношения следует, что инвариант порядка 0 принимает одно и то же значение на всех несингулярных узлах, потому что его значение не изменяется при замене типа перекрёстка.

Несложно проверить, что любой инвариант порядка не более 1 обращается в нуль на любом узле, имеющем одну точку самопересечения, т.е. $V_1 = V_0$. Действительно, для узла с одной точкой самопересечения этот инвариант не меняется при заменах типов перекрёстков. Такой узел можно привести к виду цифры 8, а для такого узла инвариант равен нулю в силу одночленного соотношения.

Аналогичные рассуждения показывают, что значение инварианта Васильева порядка n на узле с ровно n точками самопересечения не изменяется при заменах типов перекрёстков.

Символ инварианта

Символ инварианта порядка n — это ограничение инварианта на все сингулярные узлы, имеющие ровно n точек самопересечения. Два инварианта порядка n с одним и тем же символом отличаются на инвариант порядка не более $n-1$. В самом деле, их разность обращается в нуль на любом узле с n точками самопересечения, поэтому из определяющего соотношения следует, что она обращается в нуль на любом узле с $n+1$ точками самопересечения, и т.д. Таким образом, символ инварианта порядка n — это элемент факторпространства V_n/V_{n-1}.

Узлу с n точками самопересечения можно сопоставить так называемую *хордовую диаграмму* или *диаграмму Гасса*; при этом точки самопересечения раздуваются и заменяются хордами. Каждая хордовая диаграмма соответствует некоторому сингулярному узлу.

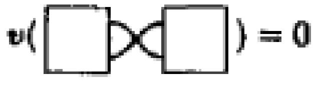

Рис. 3. Обобщённое одночленное соотношение

Рис. 4. Четырёхчленное соотношение

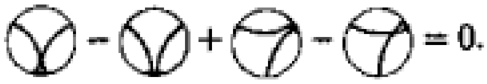

Рис. 5. Четырёхчленное соотношение для диаграмм

Значение символа инварианта порядка n на узле с n точками самопересечения зависит только от хордовой диаграммы этого узла. Поэтому любому элементу факторпространства V_n/V_{n-1} можно сопоставить набор его значений на хордовых диаграммах порядка n. Но при этом не любые наборы значений реализуются. Например, из обобщённого одночленного соотношения следует, что символ любого инварианта обращается в нуль на хордовой диаграмме, одна из хорд которой не пересекает остальные хорды. Кроме того, выполняется четырёхчленное соотношение для диаграмм (рис. 5). Для доказательства этого соотношения нужно дополнить четырёхчленное соотношение (см. рис. 4) до замкнутой кривой (это можно сделать двумя способами, но они приводят к одному и тому же результату).

Пусть Δ_n — пространство, порождённое хордовыми диаграммами, профакторизованное по подпространству, порождённому обобщённым одночленными соотношениями и четырёхчленными соотношениями. Мы получили, что $V_n/V_{n-1} \subset \Delta_n^*$. Имеет место трудная теорема, доказанная Концевичем, что в действительности $V_n/V_{n-1} = \Delta_n^*$.

Инвариант порядка 2 позволяет доказать, что трилистник — нетривиальный узел, но не позволяет отличить левый трилистник от правого. А инвариант порядка 3 уже позволяет отличить левый трилистник от правого.

Задача 1. Найдите базис пространства Δ_4.

Литература

Прасолов В.В., Сосинский А.Б., Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия, 1997. (С. 53–66.)