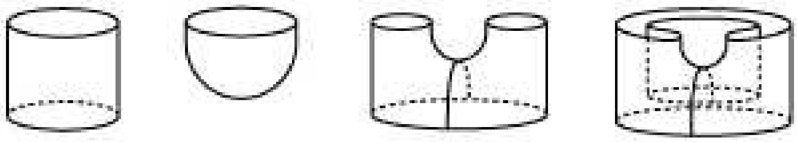

Рис. 1.

3. Простые и неприводимые многообразия. 21 февраля 2013

Определение 1. *Замкнутое многообразие называется простым, если его нельзя представить в виде связной суммы двух многообразий, каждое из которых отлично от сферы.*

Связную сумму многообразий M и N будем обозначать $M \# N$.

Определение 2. *Замкнутое многообразие называется неприводимым, если любая сфера, вложенная в него, ограничивает (хотя бы с одной стороны) шар.*

Любое неприводимое многообразие является простым. Единственное ориентируемое простое многообразие, которое не является неприводимым, — это $S^1 \times S^2$. (Докажем это чуть позже.)

Теорема Александера

Теорема 1. *Любая вложенная в $\mathbb{R}^3$ сфера S^2 ограничивает шар.*

1. Тело, огариченное любой вложенной поверхностью, можно разрезать на тела такого вида, как на рис. 1.
2. В том случае, когда вложенная поверхность — сфера, граф, вершины которого — такие тела, а рёбра соеднияют склеиваемые тела, является деревом. (Это следует из того, что любая вложенная окружность разбивает сферу на два диска.)

Простое, но не неприводимое многообразие

Теорема 2. *Единственное замкнутое ориентируемое многообразие, которое является простым, но не неприводимым, — это $S^1 \times S^2$.*

Если многообразие простое, но не неприводимое, то в нём существует неразделяющая сфера. Окрестность этой сферы и окрестность пути, соединяющего в остальной части многообразия противоположные края окрестности, представляет собой многообразие $S^1 \times S^2$, из которого вырезан диск.

Для доказательства того, что $S^1 \times S^2$ — простое многообразие, нужно рассмотреть вложенную сферу S. Она разбивает $S^1 \times S^2$ на V и W. Фундаментальная группа S тривиальна, поэтому фундаментальная группа $S^1 \times S^2$ получается следующим образом: берутся образующие групп $\pi_1(V)$ и $\pi_1(W)$ и к ним добавляются соооношения в каждой из этих групп. В результате получается $\mathbb{Z}$, поэтому одно из пространств V и W односвязно. Пусть для определённости V односвязно. Тогда V поднимается в универсальное накрытие $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^1 \times S^2$ до *диффеоморфного* ему многообразия $\tilde{V}$. По теореме Александера граница многообразия $\tilde{V}$ ограничивает шар.

Существование разложения на простые слагаемые (Кнезер, 1929)

Задача 1. Вычислите $H_1(S^1 \times S^2)$.

Задача 2. С помощью теоремы Майера–Вьеториса докажите, что:
а) при вырезании из трёхмерного многообразия шара его 1-мерные гомологии не меняются;
б) $H_1(M^3 \# N^3) = H_1(M^3) \oplus H_1(N^3)$.

Каждая неразделяющая сфера даёт слагаемое $S^1 \times S^2$, а оно, в свою очередь, даёт слагаемое $\mathbb{Z}$ в одномерных гомологиях. Поэтому рано или поздно неразделяющие сферы закончатся, и в дальнейшем будем считать, что все сферы разделяющие.

Достаточно доказать, что ограничено число попарно непересекающихся сфер, обладающих следующим свойством:

- после разрезания по этим сферам ни одна из полученных частей не является шаром, из которого, возможно, вырезано несколько шаров.

Это свойство сохраняется, если взять одну из сфер S_i, сделать перестройку по диску, граница которого принадлежит S_i, а сам диск не пересекает других сфер, и заменить S_i на одну из двух полученных при перестройке сфер (при замене на другую свойство может нарушиться).

Рассмотрим триангуляцию многообразия и приведём её в общее положение со сферами. Изотопией и перестройками можно добиться, чтобы пересечения сфер с 3-мерными симплексами были шарами. Затем на 2-мерных симплексах можно устранить дуги, оба конца которых принадлежат одному ребру. После этого на каждом 2-мерном симплексе, пересекающемся со сферами, получаются четырёхугольные (прямоугольные) части и не более четырёх частей другого типа (3 при вершинах и одна центральная). Из того, что относится к прямоугольным частям, склеиваются $\mathbb{R}P^3$ с вырезанными дисками ($S^2 \times I$ исключается, потому что нет разбивающих сфер). Каждое $\mathbb{R}P^3$ даёт слагаемое $\mathbb{Z}_2$ в 1-мерных гомологиях.

Литература

Hatcher A., Notes on Basic 3-Manifold Topology. (С.1–7.)