4. Несжимаемые поверхности. 28 февраля 2013

Единственность разложения на простые слагаемые (Милнор, 1962)

Предположим, что многообразие M имеет два разложения на простые многообразия: $P_1\#\dots P_k\#l(S^1\times S^2)$ и $Q_1\#\dots Q_m\#n(S^1\times S^2)$. Пусть S — набор непересекающихся сфер, после разрезания по которым получаются многообразия $P_1, \dots, P_k$ с проколами и, возможно, проколотые сферы (такой набор можно получить, отрезав многообразия $P_1, \dots, P_k$ и разрезав каждое многообразие $S^1\times S^2$ по неразбивающей сфере). К S можно добавлять другие сферы, указанное свойство при этом не нарушится. Аналогично рассмотрим набор T для второго разложения.

Если пересечение S с T непусто, то выберем самую внутреннюю на T окружность из пересечения. Она ограничивает на T диск D, граница которого принадлежит некоторой окружности S_j. Перестроив S_j по этому диску, получим две сферы. Сферу S_j можно на них заменить. Количество окружностей, по которым S и T пересекаются, уменьшилось, и постепенно можно получить непересекающиеся наборы сфер. Их объединение разбивает как на $P_1, \dots, P_k$ (с проколами и, возможно, ещё на проколотые сферы), так и на $Q_1, \dots, Q_m$. Следовательно, многообразия $P_1, \dots, P_k$ получаются из $Q_1, \dots, Q_m$ перестановкой. В частности, $k=m$.

Пусть $N=P_1\#\dots P_k$. Тогда $M=N\#l(S^1\times S^2)=N\#n(S^1\times S^2)$. Следовательно, $H_1(M)=H_1(N)\oplus\mathbb{Z}^l=H_1(N)\oplus\mathbb{Z}^n$. Поэтому $n=l$.

Накрытия неприводимых многообразий

Задача 1. Если многообразие M накрыто неприводимым многообразием $\tilde{M}$, то оно само неприводимо.

Задача 2. Верно ли, что если многообразие M накрыто простым многообразием $\tilde{M}$, то оно само простое?

Несжимаемые поверхности

Вспомним доказательство того, что сферу S^3 можно представить в результате склейки двух заполненных сфер с любым числом ручек: добавление в некотором смысле тривиальной ручки не меняет многообразие. Понятие несжимаемой поверхности формализует, что значит исключить такие тривиальные диски.

Пусть поверхность $S\subset M^3$ вложена правильно, т.е. $\partial S\subset\partial M^3$, и эта поверхность двусторонняя (т.е. нормальное расслоение над ней тривиально). Такая поверхность называется *несжимаемой*, если для любого двумерного диска $D\subset M^3$, для которого $D\cap S=\partial D$, кривая ∂D ограничивает на S диск (хотя бы с одной стороны). Обычно дополнительно предполагается, что несжимаемая поверхность не содержит компонент S^2 и D^2.

Свойства несжимаемых поверхностей.

1) Поверхность несжимаема тогда и только тогда, когда любая её компонента несжимаема.

2) В S^3 нет несжимаемых поверхностей.

3) Двусторонний тор в неприводимом многообразии сжимаем тогда и только тогда, когда он либо ограничивает полноторие, либо содержится в некотором шаре

4) Из (2) и (3) следует, что тор, вложенный в S^3, ограничивает с одной стороны полноторие.

5) Пусть поверхность $S\subset M$ несжимаема. Многообразие M неприводимо тогда и только тогда, когда после разрезания M по S получается неприводимое многообразие.

Нормальные поверхности

Для алгоритмических задач классификации трёхмерных многообразий большое значение имеет понятие нормальной поверхности, введённое Хакеном (1960). Нормальность определяется относительно фиксированной триангуляции многообразия. Нормальная поверхность пересекает тетраэдры триангуляции только по треугольникам и прямоугольникам (рис. 1). Нормальная поверхность не может входить в тетраэдр в виде трубочки, а связная компонента поверхности не может дважды пересекать ребро (рис. 2).

Теорема 1. *Любая замкнутая несжимаемая поверхность в неприводимом многообразии изотопна нормальной поверхности.*

Литература

Hatcher A., Notes on Basic 3-Manifold Topology. (C.7–9.)

Матвеев С.В., Метод нормальных поверхностей Хакена. В сборнике «Студенческие чтения МК НМУ», выпуск 2, 2001. (С. 133–135).

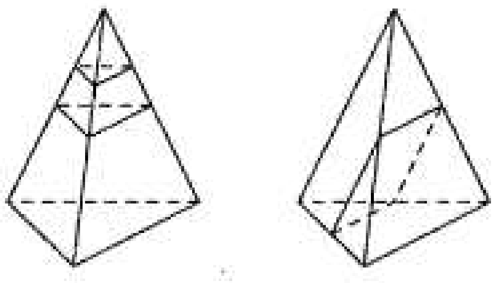

Рис. 1. Разрешённые пересечения

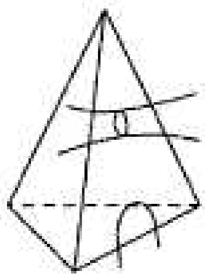

Рис. 2. Запрещённые пересечения