4. Несжимаемые поверхности. 28 февраля 2013

Единственность разложения на простые слагаемые (Милнор, 1962)

Предположим, что многообразие M имеет два разложения на простые многообразия: $P_1\#\dots P_k\#l(S^1\times S^2)$ и $Q_1\#\dots Q_m\#n(S^1\times S^2)$. Пусть S — набор непересекающихся сфер, после разрезания по которым получаются многообразия P_1, …, P_k с проколами и, возможно, проколотые сферы (такой набор можно получить, отрезав многообразия P_1, …, P_k и разрезав каждое многообразие $S^1\times S^2$ по неразбивающей сфере). К S можно добавлять другие сферы, указанное свойство при этом не нарушится. Аналогично рассмотрим набор T для второго разложения.

Если пересечение S с T непусто, то выберем самую внутреннюю на T окружность из пересечения. Она ограничивает на T диск D, граница которого принадлежит некоторой окружности S_j. Перестроив S_j по этому диску, получим две сферы. Сферу S_j можно на них заменить. Количество окружностей, по которым S и T пересекаются, уменьшилось, и постепенно можно получить непересекающиеся наборы сфер. Их объединение разбивает как на P_1, …, P_k (с проколами и, возможно, ещё на проколотые сферы), так и на Q_1, …, Q_m. Следовательно, многообразия P_1, …, P_k получаются из Q_1, …, Q_m перестановкой. В частности, $k=m$.

Пусть $N=P_1\#\dots P_k$. Тогда $M=N\#l(S^1\times S^2)=N\#n(S^1\times S^2)$. Следовательно, $H_1(M)=H_1(N)\oplus\mathbb{Z}^l=H_1(N)\oplus\mathbb{Z}^n$. Поэтому $n=l$.

Накрытия неприводимых многообразий

Задача 1. Если многообразие M накрыто неприводимым многообразием $\tilde{M}$, то оно само неприводимо.

Задача 2. Верно ли, что если многообразие M накрыто простым многообразием $\tilde{M}$, то оно само простое?

Несжимаемые поверхности

Вспомним доказательство того, что сферу S^3 можно представить в результате склейки двух заполненных сфер с любым числом ручек: добавление в некотором смысле тривиальной ручки не меняет многообразие. Понятие несжимаемой поверхности формализует, что значит исключить такие тривиальные диски.

Пусть поверхность $S \subset M^3$ вложена правильно, т.е. $\partial S \subset \partial M^3$, и эта поверхность двусторонняя (т.е. нормальное расслоение над ней тривиально). Такая поверхность называется *несжимаемой*, если для любого двумерного диска $D \subset M^3$, для которого $D \cap S = \partial D$, кривая ∂D ограничивает на S диск (хотя бы с одной стороны). Обычно дополнительно предполагается, что несжимаемая поверхность не содержит компонент S^2 и D^2.

Свойства несжимаемых поверхностей.

1) Поверхность несжимаема тогда и только тогда, когда любая её компонента несжимаема.

2) В S^3 нет несжимаемых поверхностей.

3) Двусторонний тор в неприводимом многообразии сжимаем тогда и только тогда, когда он либо ограничивает полноторие, либо содержится в некотором шаре

4) Из (2) и (3) следует, что тор, вложенный в S^3, ограничивает с одной стороны полноторие.

5) Пусть поверхность $S \subset M$ несжимаема. Многообразие M неприводимо тогда и только тогда, когда после разрезания M по S получается неприводимое многообразие.

Нормальные поверхности

Для алгоритмических задач классификации трёхмерных многообразий большое значение имеет понятие нормальной поверхности, введённое Хакеном (1960). Нормальность определяется относительно фикси-

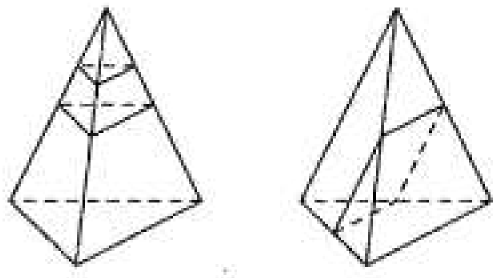

Рис. 1. Разрешённые пересечения

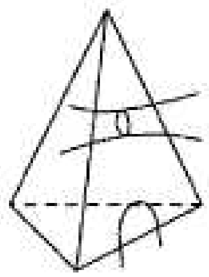

Рис. 2. Запрещённые пересечения

рованной триангуляции многообразия. Нормальная поверхность пересекает тетраэдры триангуляции только по треугольникам и прямоугольникам (рис. 1). Нормальная поверхность не может входить в тетраэдр в виде трубочки, а связная компонента поверхности не может дважды пересекать ребро (рис. 2).

Теорема 1. *Любая замкнутая несжимаемая поверхность в неприводимом многообразии изотопна нормальной поверхности.*

Литература

Hatcher A., Notes on Basic 3-Manifold Topology. (C.7–9.)

Матвеев С.В., Метод нормальных поверхностей Хакена. В сборнике «Студенческие чтения МК НМУ», выпуск 2, 2001. (С. 133–135).