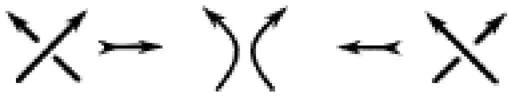

Рис. 1. Перестройки

5. Разложение на простые узлы. 7 марта 2013

Поверхность Зейферта

Поверхность Зейферта данного узла или зацепления — это связная ориентируемая поверхность, краем которой является данный узел (зацепление). Поверхность Зейферта можно построить, например, следующим образом. Рассмотрим диаграмму узла и на каждом перекрёстке сделаем перестройку, изображённую на рис. 1. В результате получим набор окружностей, ограничивающих некоторые диски. Эти диски можно сделать непересекающимися, слегка приподняв над плоскостью диаграммы. Затем на каждом перекрёстке нужно вклеить перекрученную полоску, чтобы край полученной поверхности совпал с узлом. Если в результате получится несвязная поверхность, то разные компоненты нужно соединить трубочками.

Род узла или зацепления

Род узла или зацепления — это наименьший род его поверхности Зейферта. Род узла K будем обозначать $g(K)$.

Задача 1. Докажите, что узел рода 0 тривиален; зацепление рода 0 тоже тривиально.

Для узлов K_1 и K_2 можно определить их сумму K_1+K_2 (сначала завязан узел K_1, а после него узел K_2. Узел, который нельзя представить в виде суммы двух нетривиальных узлов, называется *простым.*

Задача 2. Докажите, что $K_1 + K_2 = K_2 + K_1$.

Теорема 1. *$g(K_1 + K_2) = g(K_1) + g(K_2)$.*

Неравенство $g(K_1 + K_2) \leqslant g(K_1) + g(K_2)$ очевидно: достаточно взять непересекающиеся поверхности Зейферта для узлов K_1 и K_2 и соединить их края ленточкой (для согласования ориентации её можно перекрутить).

Докажем теперь неравенство $g(K_1 + K_2) \geqslant g(K_1) + g(K_2)$. Пусть F — поверхность Зейферта минимального рода узла $K_1 + K_2$. Рассмотрим сферу Σ, пересекающую узел $K_1 + K_2$ в двух точках и отделяющую узел K_1 от узла K_2. В ситуации общего положения F и Σ пересекаются по окружностям и ещё по некоторой дуге β, концы которой принадлежат узлу $K_1 + K_2$. В $\Sigma \setminus \beta$ выберем самую внутреннюю окружность C и сделаем перестройку по диску, который она ограничивает на Σ. Окружность C разбивает поверхность F (иначе после перестройки получилась бы поверхность Зейферта, род которой меньше минимального). Поэтому после перестройки получаем две связные компоненты; выбираем ту из них, которая содержит $K_1 + K_2$. Эта компонента имеет тот же род, что и F, а количество окружностей, по которым она пересекается с Σ, уменьшилось. В конце концов придём к поверхности F', род которой по-прежнему равен $g(K_1 + K_2)$, а с другой стороны, она составлена из поверхностей Зейферта для узлов K_1 и K_2, поэтому её род не меньше $g(K_1) + g(K_2)$.

Из этой теоремы сразу получаем такие следствия.

1) Не существует обратимых узлов, т.е. если узел K_1+K_2 тривиален, то оба узла K_1 и K_2 тривиальны.

2) Любой узел рода 1 простой.

3) Любой узел можно представить в виде суммы простых узлов.

Задача 3. Докажите, что узел трилистник простой.

Единственность разложения узла в сумму простых узлов

Теорема 2. *Пусть $K = P + Q$ и $K = K_1 + K_2$, причём узел P простой. Тогда либо $K_1 = P + K_1'$ и $Q = K_1' + K_2$, либо $K_2 = P + K_2'$ и $Q = K_1 + K_2'$*

Пусть Σ — сфера, которая разделяет узел K на K_1 и K_2, а B — шар, содержащий узел P. Узел K и сфера Σ пересекаются в двух точках M_1 и M_2. Можно считать, что Σ и ∂B пересекаются трансверсально и окружности, по которым они пересекаются, не проходят через точки M_1 и M_2. Такая окружность на сфере Σ может либо разделять эти точек (быть надетой на узел), либо не разделять (быть не надетой). Идея доказательства — постепенно упростить пересечение $\Sigma \cap \partial B$. (Если пересечение пусто, то B содержится в одной из двух компонент, на которые сфера Σ делит пространство.)

Случай 1. Окружность из $\Sigma \cap \partial B$ не надета на узел. Выберем среди таких окружностей самую внутреннюю на Σ (точки M_1 и M_2 находятся снаружи). Эта компонента ограничивает диск $D \subset \Sigma$, причём $D \cap \partial B = \partial D$. На ∂B кривая ∂D ограничивает диск D', не пересекающий K. Сфера $D \cup D'$ ограничивает шар, двигая по которому диск D', можно избавиться от одной не надетой окружности, а постепенно и от всех остальных. После этого можно будет считать, что остались только надетые окружности, и перейти ко второму случаю.

Случай 2. Окружность из $\Sigma \cap \partial B$ надета на узел. Если компонента $\Sigma \cap B$ — диск D, то этот диск пересекает K в одной точке, и узел P лежит по одну сторону от диска D, потому что этот узел простой. Диск D разделяет шар B на две части, одна из которых тривиальная, а другая содержит узел P; тривиальную часть можно убрать. Таким образом, можно считать, что все компоненты $\Sigma \cap B$ — цилиндры (кольца). Здесь надо рассмотреть два случая: 1) цилиндр содержит узел P внутри себя; 2) цилиндр сам завязан в виде узла P.

Из теоремы 2 следует, что если узел P простой, $P + Q = K_1 + K_2$ и $P = K_1$, то $Q = K_2$. Действительно, согласно этой теореме либо $P + K_1' = K_1 = P$ и $Q = K_1' + K_2$ для некоторого K_1', либо $P + K_2' = K_2$ и $Q = K_2' + K_1 = K_2' + P = K_2$ для некоторого K_2'. В первом случае род узла K_1' нулевой, поэтому он тривиален и $Q = K_2$.

Из этого уже легко выводится единственность разложения узла в сумму простых.

Литература

Lickorish W.B.R., An Introduction to Knot Theory, Springer, 1997. (C. 15–21.)