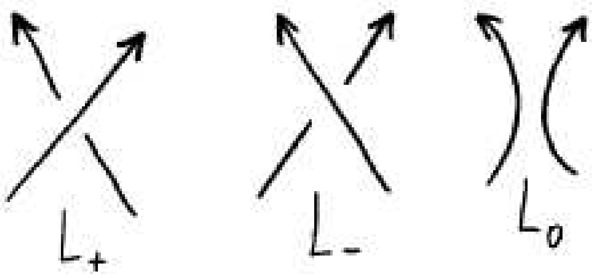

Рис. 1. Три зацепления

# 6. Некоторые виды узлов. Полином Джонса. 14 марта 2013

## Торические узлы

Торический узел типа $(p,q)$, где $p$ и $q$ — взаимно простые натуральные числа, это замкнутая траектория точки, равномерно движущейся по тору как в направлении широты, так и в направлении меридиана, и при этом обходящей тор $p$ раз в направлении широты и $q$ раз в направлении меридиана.

**Задача 1.** Докажите, что торический узел типа $(p,q)$ является также торическим узлом типа $(q,p)$.

**Задача 2.** Докажите, что любой торический узел является простым.

## Число мостов узла

Рассмотрим диаграмму узла. Назовём мостом каждую максимальную дугу диаграммы, которая проходит хотя бы над одним перекрёстком (и никогда не проходит под перекрёстками). Число мостов узла — это минимальное число мостов для всех диаграмм узла.

**Задача 3.** Докажите, что узел с одним мостом тривиален.

**Задача 4.** Докажите, что трилистник — узел с двумя мостами. (Стандартная диаграмма трилистника имеет 3 моста.)

**Задача 5.** Докажите, что торический узел типа $(p,q)$ имеет диаграмму с $p$ мостами.

**Задача 6.** Докажите, что число мостов узла равно минимальному числу локальных максимумов функции высоты для всех его представителей.

**Задача 7.** Докажите, что любой узел с двумя мостами простой.

## Полином Александера. Полином Конвея

Прежде чем переходить к полиному Джонса, обсудим вкратце исторически первый полиномиальный инвариант зацеплений — полином Александера. Пусть $L \subset S^3$ — некоторое зацепление. Фундаментальная группа $\pi_1(S^3 \setminus L)$ содержит подгруппу $H$, состоящую из петель, для которых коэффициент зацепления с $L$ равен 0. По этой подгруппе можно построить накрытие $X_\infty \to S^3 \setminus L$. Автоморфизм накрытия $t\colon X_\infty \to X_\infty$ задаётся петлёй, для которой коэффициент зацепления с $L$ равен 1. Действие этого автоморфизма переносится на гомологии, и это превращает группа $H_1(X_\infty)$ в модуль над кольцом $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Используя задание этого модуля образующими и соотношениями, ему можно сопоставить многочлен, определённый с точностью до умножения на $t^{\pm n}$. Так Александер определил инвариант зацепления, получивший название *полином Александера*.

Полином Александера — это не один полином, а множество эквивалентных полиномов. Много позже (в 1970 году) Конвей обнаружил, что в каждом множестве эквивалентных полиномов можно выбрать один полином $\Delta_L$ так, что будет выполняться следующее соотношение:

$$\Delta_{L_+} - \Delta_{L_-} = (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta_{L_0};$$

здесь $L_+$, $L_-$ и $L_0$ — три зацепления, диаграммы которых совпадают всюду, кроме малого диска, в котором они устроены так, как показано на рисунке 1.

Если добавить условие, что для тривиального узла полином равен 1, то это соотношение позволяет вычислить полином для любого зацепления.

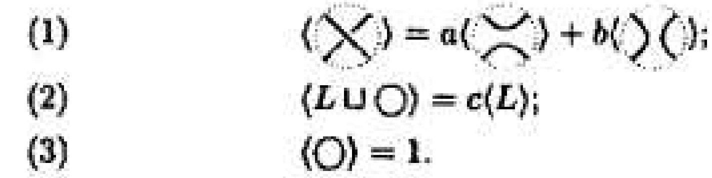


Рис. 2. Определение скобки Кауфмана

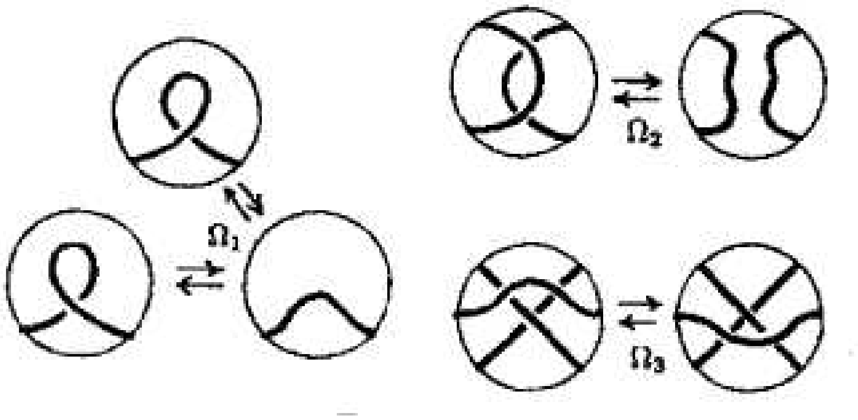


Рис. 3. Преобразования Рейдемейстера

## Полином Джонса

В первоначальном подходе Джонса полиномиальный инвариант зацеплений появился как след представления группы кос в некоторой алгебре, возникшей при изучении некоторых статистических моделей. Впоследствии Кауфман предложил более элементарный подход. Для этого сначала определяется *скобка Кауфмана* $\langle L\rangle$, сопоставляемая каждой диаграмме $L$. Она задаётся тремя соотношениями (см. рис. 2).

Два узла эквивалентны тогда и только тогда, когда их диаграммы получаются друг из друга изотопиями и преобразованиями Рейдемейстера $\Omega_1$, $\Omega_2$ и $\Omega_3$ (рис. 3).

Инвариантность скобки относительно преобразования $\Omega_2$ эквивалентна равенствам $b = a^{-1}$ и $c = -a^2 - a^{-2}$. Если эти равенства выполняются, то скобка инварианта и относительно $\Omega_3$. Относительно $\Omega_1$ скобка не инвариантна: закручивание одной петельки приводит к умножению на $-a^{\pm 3}$, но это можно исправить.

Сначала докажем, что полином $\langle L\rangle$ существует и единствен (соотношения (1)–(3) позволяют вычислять скобку разными способами; нужно доказать, что они не приводят к противоречию и что они позволяют вычислить скобку для любой диаграммы). Сопоставим каждому перекрёстку одно из двух состояний: $A$ или $B$; в результате получим некоторое состояние $s$ диаграммы. Затем на каждом перекрёстке сделаем перестройку в соответствии с его состоянием (рис. 4).

Если $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ — количество перекрёстков в состоянии $s$, а $\gamma(s)$ — количество окружностей, полученных в результате перестройки, то

$$\langle L\rangle = \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)}(-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1},$$

где суммирование ведётся по всем $2^s$ состояниям диаграммы $L$. Это доказывает единственность скобки. Но это же доказывает и её существование: легко проверить, что заданная такой формулой скобка обладает свойствами (1)–(3).

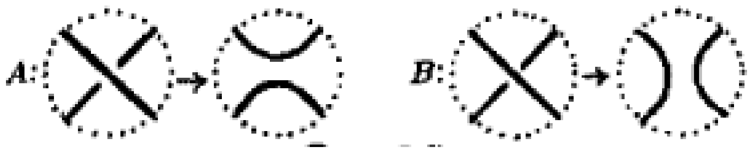


Рис. 4. Перестройка перекрёстка

Рис. 5. Число $\varepsilon$

Скобка Кауфмана определяется для зацепления без ориентации. Полином Кауфмана, который является инвариантом зацепления, определяется для ориентированного зацепления.

Чтобы получить из скобки $\langle L\rangle$ инвариантный полином, определим для диаграммы ориентированного зацепления $L$ число $w(L)=\sum_i \varepsilon_i$, где суммирование ведётся по перекрёсткам, а числа $\varepsilon_i$ равны $\pm 1$, в зависимости от типа перекрёстка (рис. 5).

**Теорема 1.** $X(L)=(-a)^{-3w(L)}\langle |L|\rangle$ *является инвариантом зацепление.*

$|L|$ здесь обозначает зацепление $L$ с забытой ориентацией. Инвариантность $w(L)$ относительно второго и третьего преобразований Рейдемейстера легко доказывается, а неинвариантности $w(L)$ и скобки Кауфмана относительно первого преобразования взаимно компенсируются.

**Задача 8.** Вычислите полином Кауфмана трилистника (левого и правого). Докажите, что левый трилистник и правый не изотопны.

Несложно получить соотношение для полинома $X(L)$, но для этого нужно вернуться к зацеплениям, изображённым на рисунке 1. Соотношение получается такое:

$$a^{-4}X(L_-)-a^4X(L_+)=(a^2-a^{-2})X(L_0).$$

Полином Джонса $V(L)$ получается из полинома Кауфмана заменой $a=q^{-1/4}$.

Пользуясь этим соотношением, полином Джонса можно вычислить, превращая зацепление в тривиальное посредством изменения типов перекрёстков.

Для зацеплений операция связной суммы не определена: соединяя разные компоненты двух зацеплений, можно получить разные зацепления. Но оказывается, что полиномы Джонса всех получаемых при этом зацеплений совпадают.

**Задача 9.** Докажите, что $V(L_1\#L_2)=V(L_1)\cdot V(L_2)$.

**Задача 10.** Докажите, что полиномы Джонса зацеплений, изображённых на рис. 6, совпадают.

**Задача 11.** Докажите, что полиномы Джонса узлов, изображённых на рис. 7, совпадают.

Неизвестно, существует ли нетривиальный узел, полином Джонса которого такой же, как у тривиального узла. (Зацепления с аналогичным свойством существуют.)

Литература

Прасолов В.В., Сосинский А.Б., Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия, 1997. (С. 34–53.)

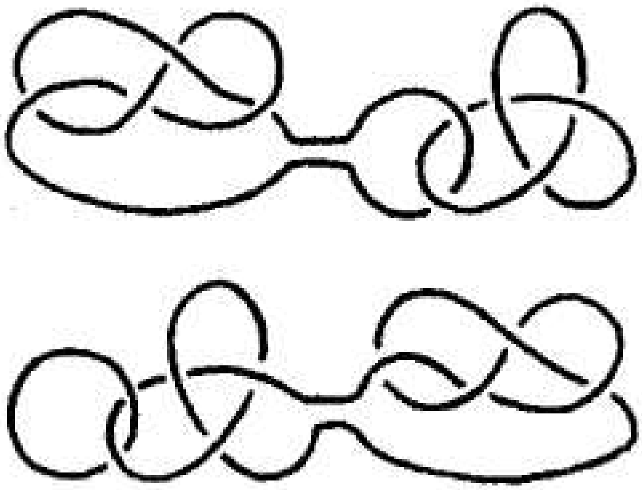

Рис. 6. Зацепления с одинаковыми полиномами Джонса

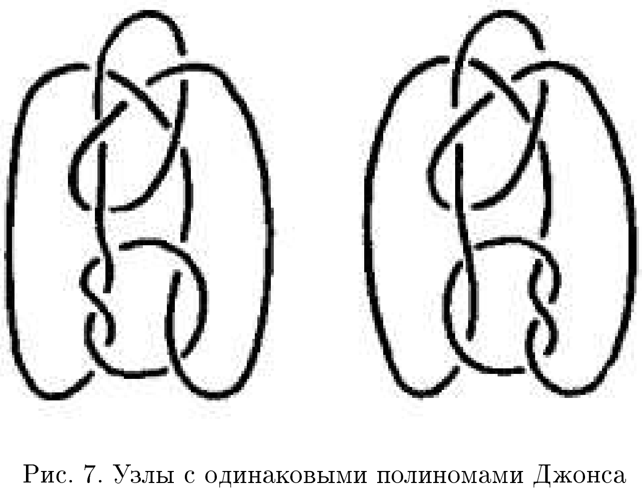

Рис. 7. Узлы с одинаковыми полиномами Джонса