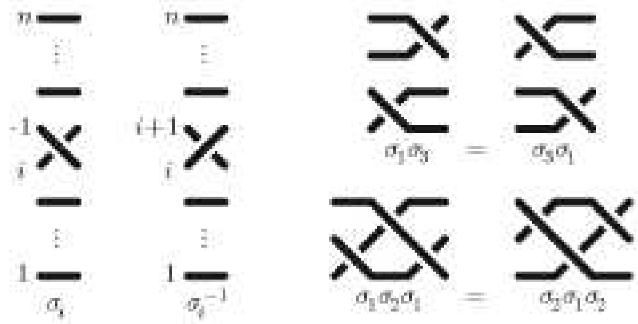

Рис. 1. Образующие и соотношения в группе кос

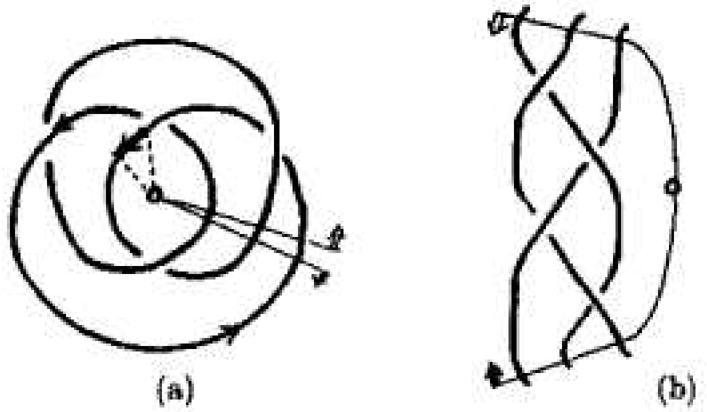

Рис. 2. Зацепление, обвивающееся вокруг точки

7. Косы. 21 марта 2013

Определение группы кос

Коса состоит из n непересекающихся нитей, монотонно идущих в некотором фиксированном направлении (т.е. проекция скорости движения на это направление постоянна); конечные точки получаются при этом из начальных одним и тем же переносом в этом фиксированном направлении. Косы из n нитей, рассматриваемые с точностью до изотопии в классе кос (начальные и конечные точки неподвижны), образуют группу B_n. Композиция такая: одна коса приставляется к другой. Обратный элемент получается симметрией относительно плоскости, перпендикулярной фиксированному направлению.

Задача 1. а) Докажите, что группа кос B_n порождена образующими $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, изображёнными на рисунке 1.

б) Докажите, что эти образующие связаны соотношениями $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ при $|i-j| > 2$ и $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.

Теорема Александера о представлении зацепления в виде замыкания косы

Каждой косе можно сопоставить её замыкание, дополнительно соединив начальные точки с конечными стандартным образом (тривиальной косой). Замыкание косы — это некоторое (ориентированное) зацепление.

Теорема 1. *Любое зацепление можно представить в виде замыкания некоторой косы.*

Если зацепление обвивается вокруг некоторой точки, т.е. на диаграмме все его компоненты обходятся в одном направлении (по или против часовой стрелки), то такое представление получается легко (рис. 2).

Чтобы произвольное зацепление превратить в обвивающееся вокруг точки O, будем считать, что зацепление полигональное и нет звеньев, направленных в точку O. Звено, направленное в неправильную сторону (относительно точки O), можно заменить на два звена, обходящих точку O с другой стороны (тут надо рассмотреть несколько случаев).

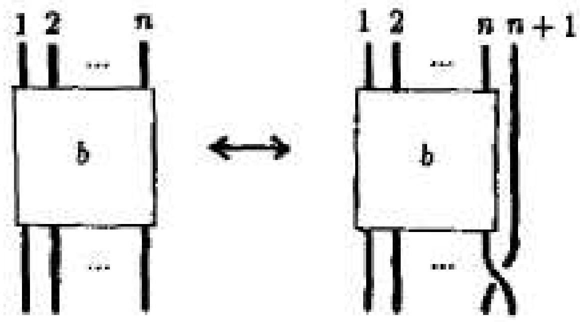

Рис. 3. Второе преобразование Маркова

Преобразования Маркова

Двум неизотопным косам при замыкании могут соответствовать изотопные зацепления. Преобразования Маркова описывают, когда это происходит.

Первое преобразование Маркова — замена косы b на сопряжённую косу aba^{-1}. Число нитей косы при этом не изменяется.

Второе преобразование Маркова изображено на рисунке 3. Число нитей при этом меняется.

Задача 2. Проверьте, что преобразования Маркова дают изотопные зацепления.

Обратное утверждение (если две косы дают эквивалентные зацепления, то они получаются одна из другой преобразованиями Маркова) — трудная теорема.

Представление Бурау

Представление Бурау — это гомоморфизм $\rho\colon B_n \to GL(n-1, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, заданный на образующих так:

$$\rho(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-3},$$

$$\rho(\sigma_i) = I_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-2},$$

$$\rho(\sigma_{n-1}) = I_{n-3} \oplus \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & -t \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Проверьте, что это определение отображения ρ согласовано с соотношениями в группе кос.

Положительные косы

Положительные косы — это косы, которые можно представить в виде произведения образующих σ_i в положительных степенях. Положительные косы образуют моноид B_n^+.

Теорема Гарсайда: естественное отображение $B_n^+ \to B_n$ инъективно, т.е. две положительные косы изотопны в классе всех кос тогда и только тогда, когда они изотопны в классе положительных кос.

Литература

Прасолов В.В., Сосинский А.Б., Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия, 1997. (С. 70–73, 81–84, 89–90.)